第二十一章教学说明和建议

一、设计说明

1. 本章的内容、地位和作用.

本章的知识内容主要包括:一次函数,一次函数的图像和性质,用待定系数法确定一次函数的表达式,一次函数的应用,一次函数与二元一次方程的关系. 这些内容彼此关联,依次递进.

一次函数是在学习了一般的函数概念之后,进一步研究的第一类特殊函数,它不仅是现实生活中极为广泛的一类数量关系的抽象模型,有着广泛的应用,而且在整个函数知识的学习中,起着承上启下的重要作用. 这主要表现为:第一,通过一次函数的学习,使学生对"函数"这一抽象的核心概念的理解更加深入,对"函数模型"的理解逐步走向深入与深刻、丰满与充实,对"函数"这一系统知识的认识与掌握进一步强化和提升;第二,一次函数的学习,不仅从变量关系类型上为二次函数、反比例函数的学习提供了对照与类比,更从研究方法(如"利用函数图像研究函数的性质""借助待定系数法求函数表达式"等)上,展示了普遍的意义和作用.

2. 本章内容呈现方式及特点.

(1)一次函数的意义同样是比较抽象的,教科书中采用了这样的研究过程:从小学已认识的"成正比例的量"入手,先引入"正比例函数",再扩展到"一次函数". 这样编排的目的,一是从学生已有的"数学现实"出发,使新知识的引入比较自然;二是采用"由特殊到一般"的归纳方式,符合学生的认知规律,有利于数学活动经验的积累.

(2)对于学生来说,无论是"正比例函数"还是"一次函数",其概念认识的形成,都必须借助于相当数量的、他们所熟悉的现实情境,通过归纳、抽象才能实现. 因此,教科书特别关注情境的设置与"抽象"过程的有效展开,以促使学生产生有价值的数学思考,完成理性认识的飞跃.

(3)对于一次函数性质的研究,教科书中突出了"数形结合",即由图像特征引发出函数随自变量变化的增、减性质. 因此,图像的绘制与观察,便起着铺垫与引导的重要作用.

(4)教科书紧紧抓住"一点在函数的图像上"与"该点的坐标满足函数的表达式"的对应及一致性,导出用待定系数法求一次函数的表达式,意在突出"形与数"的统一与相互转化,并显示"方程"的广泛应用. 随后,又专项研究了一次函数与二元一次方程的关系,更为有力地揭示了函数与方程的关联性.

(5)所有内容的呈现,一是尊重学生的数学现实,二是尽可能展开学生的观察、思考、交流与研究的活动过程,以充分提供学生自主发展的空间.

二、教学目标

1. 结合具体情境体会一次函数的意义,能根据已知条件确定一次函数的表达式.

2. 会利用待定系数法确定一次函数的表达式.

3. 能画出一次函数的图像,根据一次函数的图像和表达式 $y=kx+b(k\neq0)$ 探索并理解 $k>0$ 和 $k<0$ 时,图像的变化情况.

4. 体会一次函数与二元一次方程的关系.

5. 能用一次函数解决简单的实际问题.

6. 进一步发展学生数学抽象能力,强化数学的应用意识.

三、教学建议

1. 本章之前,刚刚学习了第二十章“函数”,学生对于函数的意义和图像已有了初步的认识,对于相应知识的探究过程及方法,也有了初步的经验积累;另一方面,一次函数源于现实中极为广泛存在的“匀速”变化情境里的数量关系,这样的背景早在此前的许多“算术”应用题和“方程”应用题中以多种“特值”形式反复出现过. 这些都是开始本章学习的“数学现实”,教学正是应当从这样的现实出发,用好这样的现实,以优化的过程取得优良效果.

2. 正比例函数是“成正比例的量”的一般化和发展,一次函数又是正比例函数的一般化和发展,许多数学知识就是沿着这样的途径扩展与增长出来的. 教学中就要引导学生遵循这样的线索去探究,去再发现,构筑良好的知识系统,并借此提高学生的学习能力.

3. 一次函数的图像是直角坐标系里的一条直线(不与坐标轴平行),这正是函数对于自变量“匀速”变化的直观(形的)反映. 事实上,在确定的直角坐标系里,这样的直线与一次函数表达式是“一一对应”的. 恰是基于这种对应,图像(直线)的倾斜情况就反映了一次函数对于自变量变化的增减情况(以及增减速度),一次函数的性质就是借此被“形象”地看出来的;另一方面,用待定系数法确定一次函数的表达式,也是以上述“一一对应”为根据的. 因此,在教学中,引导学生通过画图像与研讨,感悟一次函数与其图像的关系便是十分重要的了.

4. 一次函数的应用的教学,应当特别关注两个方面,一是怎样将实际问题或数学问题转化为一次函数问题;二是通过广泛应用,进一步体会一次函数“匀速”变化的本质特征.

5. 从两个方面引导学生感悟一次函数与二元一次方程的联系,一是直接从表达式的相互转换进行引导,二是从它们对应于确定的直角坐标系里的同一条直线进行引导. 由此使学生体会函数与方程的又一种沟通方式.

四、课时建议

21.1	一次函数	2 课时
21.2	一次函数的图像和性质	2 课时
21.3	用待定系数法确定一次函数的表达式	1 课时
21.4	一次函数的应用	2 课时
21.5	一次函数与二元一次方程的关系	1 课时
	回顾与反思	1 课时
	合　计	9 课时

五、评价建议

1. 关注对一次函数概念形成的抽象过程的评价. “抽象”是基本数学思想中最为重要的一个方面,是数学知识形成与发展的最为基本的思维形式,也是数学能力构成的基本要素. 通过评价的引导,以促进学生对熟悉抽象的重视和自觉运用.

2. 注重对知识与技能的评价. 重点要放在知识的内在联系,一次函数各种表达形式的相互转换,以及如何通过建立一次函数模型来解决相关的实际问题和数学问题上.

3. 在本章的教学中,大部分的教学活动都应以学生独立思考、合作交流、一起探究的形式来完成,所以,学生是否积极与独立思考,是否善于主动地与同学合作,都应该引起教师的注意,要对学生好的表现及时给予鼓励.

4. 注重对学生情感态度的评价. 在学生学习活动中,要注意培养学生自信、自强的性格,记录学生在学习过程中的情感表现以及在解决问题的过程中所表现出来的创新精神.

第二十一章 一次函数

在本章中，我们将学习

- 一次函数
- 一次函数的图像和性质
- 用待定系数法确定一次函数表达式
- 一次函数的应用
- 一次函数与二元一次方程的关系

现有一根弹簧，可以悬挂重物，弹簧的长度随悬挂重物质量的变化而变化，弹簧长度与悬挂重物质量之间有怎样的关系呢？

章题页列出了本章将要学习的五个方面的主要内容.

章题图以弹簧在悬挂重物时，弹簧的长度随悬挂的重物质量的变化而变化这一学生熟悉的事实，来说明一次函数是极为普遍的一类数量关系的抽象；背景显示的直角坐标系里的直线，内含了一次函数的"形化"特征.

* * * * * * * * * * * *

教学目标

1. 经历由现实情境抽象出正比例函数的过程.

2. 结合具体情境体会一次函数的意义，能根据已知条件确定一次函数的表达式.

3. 再一次感悟函数模型，培养学生的抽象能力.

观察与思考

从小学已熟悉的"成正比例的量"出发，由"匀速"行驶过程中行驶时间与所行路程的关系，抽象出正比例函数.

(1)成正比例，因为路程与时间的比是常数0.2.

(2)函数 s 总是自变量 t 的 0.2 倍.

21.1 一次函数

函数可以用来刻画数量之间的关系，一次函数是一种重要的函数. 现在，我们来探究一次函数.

我们在小学就认识了成正比例的量，并能从实际问题中判断出成正比例的两个量.

观察与思考

小刚骑自行车去上学，行驶时间和路程之间的关系如下表：

时间/min	1	2	3	4	5	…	17.5
路程/km	0.2	0.4	0.6	0.8	1	…	3.5

(1) 小刚行驶的路程和时间成正比例吗？为什么？

(2) 如果用 t(min)表示时间，s(km)表示路程，那么 s 与 t 之间的函数关系式具有什么特征？

通过观察与计算，我们发现小刚离开家的路程与时间的比值恒等于0.2，即这两个量是成正比例的量.

s 与 t 的函数关系式为：$s=0.2t$.

做一做

1. 小亮每小时读 20 页书. 若读书时间用字母 t(h)表示，读过书的页数用字母 m(页)表示，则用 t 表示 m 的函数表达式为________.

2. 小米去给学校运动会买奖品，每支铅笔 0.5 元. 若购买铅笔的数量用 n(支)表示，花钱的总数用 w(元)表示，则用 n 表示 w 的函数表达式为________.

3. 拧不紧的水龙头每分钟滴出 100 滴水，每滴水约 0.05 mL. 设 t min

教学建议

一次函数是在对一般"函数"概念有了初步认识之后，继续学习的第一类特殊函数.

本节内容就是深入地认识一次函数，按照"成正比例的量"—"正比例函数"—"一次函数"这一递升次序安排的. 这样做的目的主要有两个：一是更好地体现事物"由简单到复杂""由特殊到一般"的发展规律；二是成正比例的量在小学已较为熟悉，由此抽象出正比例函数，进而由正比例函数扩展到一次函数，可更好地借用学生已有的数学知识，有效地展现知识的"抽象"生成过程，使一次函数概念的形成更自然、更深刻，更好地体现模型思想. 希望教师充分注意上述立意.

《义务教育数学课程标准》(2011 年版)指出："模型思想的建立是学生体会和理解数学与外部世界联系的基本途径."一次函数就是最为重要的数学模型之一，这一要求的实现要靠

后，水龙头滴水 V mL，则用 t 表示 V 的函数表达式为________.

在上面的问题中，函数表达式分别为 $m=20t$，$w=0.5n$，$V=5t$.

这些函数的共同特点是：都能写成 $y=kx$ 的形式. 其中，k 为常数，且 $k\neq0$.

一般地，我们把形如 $y=kx$（k 为常数，且 $k\neq0$）的函数，叫做**正比例函数**（proportional function）. 其中，非 0 常数 k 叫做比例系数.

例 1 下列函数中，哪些是正比例函数？请指出其中正比例函数的比例系数.

（1）$y=3x$；（2）$y=2x+1$；（3）$y=-\dfrac{x}{2}$；

（4）$y=\dfrac{2}{x}$；（5）$y=\pi x$；（6）$y=-\sqrt{3}x$.

解：(1),(3),(5),(6)是正比例函数，比例系数分别是 3，$-\dfrac{1}{2}$，π，$-\sqrt{3}$. (2)和(4)不是正比例函数.

例 2 有一块 10 公顷的成熟麦田，用一台收割速度为 0.5 公顷/时的小麦收割机来收割.

（1）求收割的面积 y（公顷）与收割时间 x（h）之间的函数关系式.

（2）求收割完这块麦田需用的时间.

解：（1）$y=0.5x$.

（2）把 $y=10$ 代入 $y=0.5x$ 中，得 $10=0.5x$.

解得 $x=20$，即收割完这块麦田需要 20 h.

答：（1）y 与 x 之间的函数关系式为 $y=0.5x$.

（2）收割完这块麦田需要 20 h.

练　习

1. 判断下列哪个问题中的两个量具有正比例关系.

（1）向圆柱形水杯中加水，水的体积与高度.

（2）正方形的面积与它的边长.

（3）小丽录入一篇文章，她的打字速度与所用时间.

（4）人的体重与身高.

练　习

1.(1).

* * * * * * * * * * * *

切实有效的教学活动.

1. 首先引导学生回忆上一章刚学习过的函数的意义，为本节的学习铺垫好进一步抽象的基础. 其次，回忆小学时学习过的成正比例的量. 实际上，成正比例的量是函数的最早雏形，也是学生最为熟悉的正比例函数的实例.

2. 对于“观察与思考”和“做一做”活动中的问题情境，应努力引导学生通过思考与解答，体会出如下两点：

第一，每一对成正比例的量之间都是一种函数关系，并且都可以表示成函数是自变量某一确定“倍数”的形式——这正是正比例函数形式定义的基础.

第二，每一对成正比例的量构成的函数，函数对于自变量的变化都是“匀速”的，这正是正比例函数及一次函数的本质特征.

2. (1) 9. (2) 4.
(3) −5.

习 题

A 组

1. (1), (3), (5), (6) 为正比例函数; 比例系数分别为 $-4, \frac{5}{6}, -0.9, \sqrt{5}-1$.
2. (1) $y=4x$. (2) $y=20$. (3) $x=\frac{5}{4}$.
3. (1) $V=8S$. (2) $V=512\ \text{m}^3$.

B 组

1. x 和 z 成正比例.
2. $m=-3$.

一起探究

(1), (2) 略; (3) 相同点: 都是自变量的一次式; 不同点: 正比例函数表达式的常数项为 0, 这个函数表达式常数项不为 0.

2. 填空:

(1) 已知函数 $y=3x$. 当 $x=3$ 时, $y=$________.

(2) 已知函数 $y=\frac{3}{4}x$. 当 $y=3$ 时, $x=$________.

(3) 已知函数 $y=kx$, 当 $x=-2$ 时, $y=10$. $k=$________.

习 题

A 组

1. 在下列函数中, 哪些是正比例函数? 请指出其中正比例函数的比例系数.

(1) $y=-4x$; (2) $y=3x-1$; (3) $y=\frac{5x}{6}$;

(4) $y=\frac{9}{x}$; (5) $y=-0.9x$; (6) $y=(\sqrt{5}-1)x$.

2. 已知 y 是 x 的正比例函数, 当 $x=2$ 时, $y=8$.

(1) 写出 y 与 x 之间的函数关系式.

(2) 当 $x=5$ 时, 求 y 的值.

(3) 当 $y=5$ 时, 求 x 的值.

3. 一个深度为 8 m 的长方体污水处理池, 容积为 $V(\text{m}^3)$, 污水池的底面积为 $S(\text{m}^2)$.

(1) 写出用 S 表示 V 的函数表达式.

(2) 当 $S=64\ \text{m}^2$ 时, 求 V 的值.

B 组

1. 如果 x 和 y 成正比例, y 和 z 成正比例, 那么 x 和 z 之间有什么关系?
2. 已知函数 $y=(3m+9)x^2+(2-m)x$ 是关于 x 的正比例函数, 求 m 的值.

在本节"小刚骑自行车去上学"的问题中, 小刚家到学校的路程为 3.5 km, 小刚骑车的速度为 0.2 km/min. 设小刚距学校的路程为 s km, 离开家的时间为 t min.

一起探究

(1) 写出 s 与 t 之间的函数关系式, 并指出其中的常量与变量.

(2) 写出 t 的取值范围.

(3) 对比正比例函数, 它们的表达式在结构上有什么相同点与不同点?

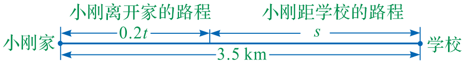
86 | 数学 八年级下册

3. 对于正比例函数的定义, 应强调常数 k 既可以是正数也可以是负数, 因此, 正比例函数是成正比例的量的拓展与再抽象.

4. 对于例 1 的教学, 重点是引导学生搞清楚正比例函数的形式定义.

5. 对于例 2 的教学, 应引导学生掌握这类问题的思考过程应是: 根据"匀速"变化的特征写出函数表达式, 由函数值求相应的自变量的值就要通过解方程.

一般地，解决行程类的问题时，常常借助如下图示来分析.



分析上图，容易看出，s 与 t 的函数关系式为 $s=3.5-0.2t$. 其中，3.5，0.2 是常量，s 与 t 是变量. 如果将 t 作为自变量，那么 s 是 t 的函数.

因为 $3.5-0.2t\geqslant 0$，所以 $t\leqslant 17.5$. 所以 t 的取值范围为 $0\leqslant t\leqslant 17.5$.

做一做

1. 某新建住宅小区的物业管理费按住房面积收缴，每月 1.60 元/平方米；有汽车的房主再交车库使用费，每月 80 元. 设有车房主的住房面积为 x m²，每月应缴物业管理费与车库使用费的总和为 y 元，则用 x 表示 y 的函数表达式为__________.

2. 向一个已装有 10 dm³ 水的容器中再注水，注水速度为 2 dm³/min. 容器内的水量 y(dm³)与注水时间 x(min)的函数关系式为__________.

3. 一种计算成年人标准体重 G(kg)的方法是，以厘米为单位量出身高值 h，减常数 105，所得差是 G 的值. 用 h 表示 G 的函数表达式为__________.

从上面问题中，我们分别得到了函数表达式：

$$s=3.5-0.2t,\quad y=1.6x+80,\quad y=2x+10,\quad G=h-105.$$

大家谈谈

这些函数表达式的形式有什么共同特点？与同学交流你的看法.

一般地，我们把形如 $y=kx+b$(k，b 为常数，且 $k\neq 0$)的函数，叫做**一次函数**(linear function).

对于一次函数 $y=kx+b$，当 $b=0$ 时，它就化为 $y=kx$. 所以正比例函数 $y=kx$ 是一次函数的特殊形式.

做一做

在下列函数中，哪些是一次函数？请指出一次函数中的 k 和 b 的值.

做一做

教学中应引导学生注意，在这三个问题里，函数的表达式都是由一个正比例函数与一个常数通过加或减而成的.

大家谈谈

这些函数的表达式都是自变量的一次式，自变量的一次项部分是一个正比例函数.

做一做

(1)，(2)，(4)，(5)都是一次函数，k 和 b 的值

* * * * * * * * * * * *

教学建议

1. 可引导学生从表达式与“匀速”变化两个角度，回忆上一课时刚学习过的正比例函数，为一次函数的学习打好基础.

2. 对于“一起探究”和“做一做”活动中的 4 个问题，可引导学生仔细作下列分析：

(1)它们反映的两个变量间的关系，都是由一个正比例函数与一个常数进行加或减而成的；

(2)因为加减的常数不影响函数对于自变量的变化速度，所以其中的每一个函数都与和它对应的正比例函数有着同样的变化速度(当然，对同一个自变量有不同的函数值).

3. 正如 2 中所进行的思考与分析，“大家谈谈”不只停留在表达式外形的共性上，还是从两个变量变化过程的本质特征上认识一次函数.

见下表：

小题号	k	b
(1)	3	6
(2)	$-\dfrac{1}{3}$	2
(4)	-0.4	0
(5)	-2	$\sqrt{3}$

练 习

1. 一次函数有：

(1) $k=-1, b=2$；

(3) $k=0.03, b=8$；

(4) $k=\dfrac{2}{5}, b=0$；

(5) $k=\sqrt{2}, b=-3$.

(1) $y=3x+6$； (2) $y=-\dfrac{1}{3}x+2$； (3) $y=\dfrac{x+3}{x}$；

(4) $y=-0.4t$； (5) $w=\sqrt{3}-2z$； (6) $y=2x^2+6x-9$.

例 3 如图 21-1-1，$\triangle ABC$ 是边长为 x 的等边三角形.

(1) 求 BC 边上的高 h 与 x 之间的函数关系式. h 是 x 的一次函数吗？如果是一次函数，请指出相应的 k 与 b 的值.

(2) 当 $h=\sqrt{3}$时，求 x 的值.

(3) 求$\triangle ABC$ 的面积 S 与 x 之间的函数关系式. S 是 x 的一次函数吗？

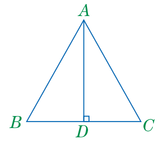


图 21-1-1

解：(1) 因为 BC 边上的高 AD 也是 BC 边上的中线，所以，$BD=\dfrac{1}{2}x$. 在 Rt$\triangle ABD$ 中，由勾股定理，得

$$h=AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{x^2-\frac{1}{4}x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x,$$

即 $h=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

所以 h 是 x 的一次函数，且 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$b=0$.

(2) 当 $h=\sqrt{3}$时，有$\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

解得 $x=2$.

(3) 因为 $S=\dfrac{1}{2}AD\cdot BC=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\cdot x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$，即 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$，所以 S 不是 x 的一次函数.

练 习

1. 在下列函数中，哪些是一次函数？请指出一次函数中的 k 和 b 的值.

(1) $y=2-x$； (2) $y=1+x+\dfrac{1}{x}$； (3) $s=8+0.03t$；

(4) $y=\dfrac{2}{5}x$； (5) $s=\sqrt{2}t-3$； (6) $y=5x^2-6$.

* * * * * * * * * * * *

4. 对于一次函数与正比例函数的关系，应使学生认识到：一次函数包括了正比例函数，正比例函数是一次函数中的一类特殊形式(表达式中常数项为 0).

5. 通过“做一做”使学生进一步明确：由表达式判别一次函数，只需看它是否为自变量的一次式.

2. 已知两条平行线 l_1，l_2 之间的距离为 3 cm，点 A 在 l_1 上，点 B，C 在 l_2 上，$BC=x$. 求△ABC 的面积 S 与 x 的函数关系式，并判断这个函数是不是一次函数.

习 题

A 组

1. 在下列函数中，哪些是一次函数？请指出一次函数中的 k 和 b 的值.

(1) $y=\frac{1}{3}-x$；　(2) $y=2\pi R$（R 为自变量）；

(3) $y=\frac{3x-1}{x}$；　(4) $y=0.5x+\frac{\pi}{3}$.

2. 已知一次函数 $y=-2x+3$.

(1) 当 x 为何值时，$y=0$？

(2) 当 y 为何值时，$x=0$？

3. 由 S 市寄往 G 市的包裹，邮寄标准是 3 元/千克. 另外，每件收取挂号费 2 元.

(1) 写出邮寄总费用 y(元)与包裹质量 x(kg)之间的函数关系式.

(2) 如果邮寄包裹的质量为 7.8 kg，那么邮寄总费用为多少元？

B 组

大学生小张想利用暑期一个月的时间为一家报社推销报纸，以积累自己的社会活动经验. 报社规定：按月提前预订，每天订数须相同；推销员从报社的购买价是 0.7 元/份，销售价是 1 元/份；推销员售不出的，报社以 0.2 元/份回收. 小张经咨询他人还了解到：暑期一个月里(按31 天计算)，有 20 天每天可售出 100 份，有 11 天每天可售出 60 份. 设小张每天向报社预订 x 份报纸($60\leqslant x\leqslant 100$). 求：

(1) 这个月购买报纸的费用 y_1 与 x 的函数关系式.

(2) 这个月的销售收入 y_2 与 x 的函数关系式.

(3) 这个月报社回收报纸的金额 y_3 与 x 的函数关系式.

(4) 这个月小张的获利 y 与 x 的函数关系式.

2. $S=\frac{3}{2}x$，是一次函数.

习 题

A 组

1. 一次函数有：

(1) $k=-1, b=\frac{1}{3}$；

(2) $k=2\pi, b=0$；

(4) $k=0.5, b=\frac{\pi}{3}$.

2. (1) $x=\frac{3}{2}$；

(2) $y=3$.

3. (1) $y=3x+2$；

(2) 当 $x=7.8$ 时，$y=3\times 7.8+2=25.4$(元).

B 组

(1) $y_1=21.7x$；

(2) $y_2=20x+660$；

(3) $y_3=2.2x-132$；

(4) $y=y_2+y_3-y_1=0.5x+528$.

教学目标

1. 通过实际操作，掌握一次函数图像的画法，感知并确认一次函数的图像是一条直线.

2. 能根据一次函数的图像和表达式 $y=kx+b(k\neq0)$ 探索并理解当 $k>0$ 和 $k<0$ 时，图像的变化情况.

3. 掌握一次函数的性质.

试着做做

填表与图像略.

一起探究

1. 图像为一条直线.

2. 由画图过程知，一次函数 $y=2x-1$ 的图像是由所有满足关系式 $y=2x-1$ 的点 (x,y) 连线而得到的，因此，凡是满足关系式 $y=2x-1$ 的 x,y 的值所对应的点 (x,y) 都在一次函数 $y=2x-1$ 的图像上.

* * * * * * * * * * *

21.2 一次函数的图像和性质

一次函数是一种形式上比较简单的函数，我们可以借助一次函数的图像对它的性质进行研究.

已知函数的表达式，通过列表、描点和连线，可以在直角坐标系中画出这个函数的图像.

试着做做

已知一次函数 $y=2x-1$.

(1) 填写下表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…								…

(2) 以(1)中得到的每对对应值分别为横坐标和纵坐标，在图21-2-1所示的直角坐标系中描出相应的点.

(3) 把由(2)描出的点依次用平滑曲线连接起来，就得到 $y=2x-1$ 的图像.

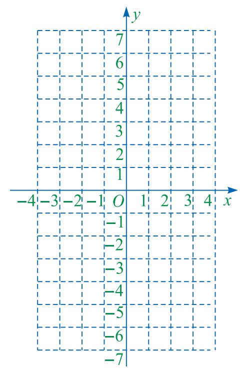


图 21-2-1

一起探究

1. 一次函数 $y=2x-1$ 的图像的形状是怎样的？你和其他同学得到的结果一样吗？

2. 凡是满足关系式 $y=2x-1$ 的 x，y 的值所对应的点，如 $(-\frac{1}{2}，-2)$，$(\frac{1}{2}，0)$，$(4，7)$ 等，都在一次函数 $y=2x-1$ 的图像上吗？与同学交流你的看法.

一般地，一次函数 $y=kx+b$ 的图像为一条直线. 因此，我们把一次函数

教学建议

本节内容的教学应主要突出两点：一是通过学生的实际操作，让学生感知并确认一次函数的图像是一条直线；二是通过对一次函数表达式及对应图像的观察与比较，总结与概括出一次函数的性质. 在教学过程中，应时时渗透“数形结合”的思想. 对第一课时有如下的教学建议：

1. 首先引导学生回忆上一章刚学习过的函数图像的画法，然后让学生尝试独立完成“试着做做”中的问题，经历确定(具有代表性的)一系列对应数值、描点、用平滑曲线连接的完整过程. 这个过程是形成“一次函数的图像是一条直线”概括认识的经验基础.

2. “一次函数的图像是一条直线”包含两层意思：(1)凡是满足某个一次函数关系式的变量的一组对应值确定的点，都在这条直线上；(2)直线上的任意一点的坐标对应的变量的值，都满足这个一次函数的关系式. 在“一起探究”过程中，应让学生通过观察与举例验证的方

数 $y=kx+b$ 的图像也称为直线 $y=kx+b$.

画一次函数的图像时，只要确定出两个点，再过这两点画直线就可以了.

取点时，坐标的数值越简单，描点越方便.

例 1 画一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 的图像.

解：当 $x=0$ 时，$y=1$.

当 $y=0$ 时，$0=-\frac{1}{2}x+1$，解得$x=2$.

在直角坐标系中，过点(0，1)和点(2，0)画直线，即得一次函数 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 的图像，如图 21－2－2.

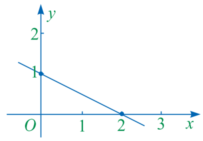


图 21－2－2

练 习

1. 在同一直角坐标系中，画出 $y=x$ 和 $y=1-x$ 的图像.
2. 在同一直角坐标系中，画出 $y=\frac{1}{2}x-1$ 和 $y=-\frac{1}{2}x$ 的图像.

习 题

A 组

1. 在同一直角坐标系中画出 $y=-3x$ 和 $y=3x$ 的图像.
2. 在同一直角坐标系中画出下列函数的图像.

(1) $y=2x$；　(2) $y=2x+5$；　(3) $y=2x-5$.

B 组

1. 填表并观察下列两个函数的变化情况.

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=x-10$							
$y=-5x+2$							

(1) 在同一直角坐标系中画出这两个函数的图像.

练 习

1. 图像略.
2. 图像略.

习 题

A 组

1. 过(0,0)和(1,－3)画直线 $y=-3x$，图像略；过(0,0)和(1,3)画直线 $y=3x$，图像略.
2. (1)过(0,0)和(1,2)画直线 $y=2x$，图像略.
(2)过(0,5)和(1,7)画直线 $y=2x+5$，图像略.
(3)过(0,－5)和(3,1)画直线 $y=2x-5$，图像略.

* * * * * * * * * * * *

法，获得以上两个方面的感悟与认识. 这可按以下步骤实施：(1)对于问题 2 中已举出的数对，一定要让学生通过具体描点，进行图形上的实际验证. 让学生自己随意确定满足关系的数对，再验证，强化确认. (2)在已经画出的 $y=2x-1$ 的图像(直线)上，再取出两点，通过测量其到两坐标轴的距离，分别求得它们的坐标，检验每对坐标值是否满足这个函数的关系式. 这个验证有一定困难，原因是任意一点的坐标不易准确地得到，教师可让学生找较特殊的点获得这方面的感受即可.

3. 教材中指出："画一次函数的图像时，只要确定出两个点，再过这两点画直线就可以了."可以先引导学生思考"怎样更快地画出一次函数的图像". 通过大家的讨论取得共识，再由例 1 的操作实践，得到结论.

4. 通过练习题，引导学生总结出：正比例函数的图像，是过坐标原点的一条直线.

B 组

1. (1) 填表，图像略.

(2) 有公共点，交点为 $(2,-8)$.

2. $y=0.5x+12$，$0\leqslant x\leqslant 8$，图像略.

做一做

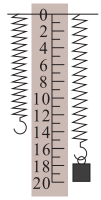
目的是让学生通过对一次函数 $y=2x+3$ 和 $y=-2x+4$ 以及 $y=\frac{1}{2}x-2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 图像的观察与对比，发现直线 $y=kx+b$ 的倾斜方向完全由 k 是正数还是负数所决定.

观察与思考

借助图像引导学生发现：一次函数 $y=kx+b$ 中，k 为正数还是负数决定着函数的增减性.

(2) 它们的图像有公共点吗？如果有，请写出公共点的坐标.

2. 今有一根弹簧，不悬挂重物时的长度为 12 cm. 悬挂的重物每增加 1 kg(重物不超过 8 kg)，弹簧的长度就增加 0.5 cm. 写出弹簧长度 y(cm)和悬挂物的质量 x(kg)之间的函数关系式，指出自变量的取值范围，并画出这个函数的图像.



(第 2 题)

借助一次函数的图像，我们就可以探究一次函数的性质了.

做一做

1. 请在图 21-2-3 的直角坐标系中，画出一次函数 $y=2x+3$ 和 $y=\frac{1}{2}x-2$ 的图像.

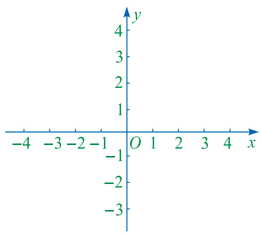


图 21-2-3

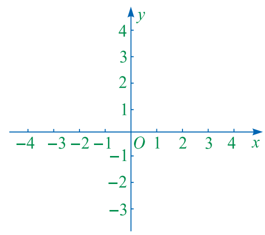


图 21-2-4

2. 请在图 21-2-4 的直角坐标系中，画出一次函数 $y=-2x+4$ 和 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 的图像.

观察与思考

观察上面画出的四个函数 $y=2x+3$，$y=\frac{1}{2}x-2$，$y=-2x+4$，$y=-\frac{1}{2}x+2$ 的图像，请思考：

(1) 哪些函数，y 的值是随 x 的值的增大而增大的？

(2) 哪些函数，y 的值是随 x 的值的增大而减小的？

* * * * * * * * * * * *

教学建议

本节内容的第二课时，主要探究一次函数性质，落实过程可分为两段活动：第一，通过对一次函数 $y=kx+b$ 表达式中 k 取正值或负值对应的直线(函数的图像)的观察与对比，发现 k 的符号决定着直线的倾斜方向；第二，直线的倾斜方向，反映着这个一次函数是随自变量的增大而增大还是减小的. 而后，通过观察，又总结出直线 $y=kx+b$ 与纵轴交点的坐标与常数 b 的关系.

具体过程可如下展开：

1. 对于“观察与思考”的教学，关键是引导学生通过对函数 $y=kx+b$ 图像的观察与对比，发现 k 为正数还是负数决定着直线的倾斜方向，即决定了函数的增减性. 为了使对比更明显，四个函数图像的安排可有三种选择：

（3）y 的值随 x 的值的增大而增大和 y 的值随 x 的值的增大而减小两种函数，它们的区别和自变量系数的符号有怎样的关系？

一般地，我们有：

对于一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，且 $k\neq0$）：
当 $k>0$ 时，y 的值随 x 的值的增大而增大；
当 $k<0$ 时，y 的值随 x 的值的增大而减小.

大家谈谈

参考上面画出的四个函数 $y=2x+3$，$y=\frac{1}{2}x-2$，$y=-2x+4$，$y=-\frac{1}{2}x+2$ 的图像，请谈谈：

（1）哪些函数的图像与 y 轴的交点在 x 轴的上方，哪些函数与 y 轴的交点在 x 轴的下方？

（2）函数的图像与 y 轴的交点在 x 轴的上方和函数的图像与 y 轴的交点在 x 轴的下方，这两种函数，它们的区别与常数项有怎样的关系？

（3）正比例函数的图像一定经过哪个点？

事实上，一次函数 $y=kx+b$ 的图像是经过 y 轴上的点$(0，b)$的一条直线．当 $b>0$ 时，点$(0，b)$在 x 轴上方；当 $b<0$ 时，点$(0，b)$在 x 轴下方；当 $b=0$ 时，点$(0，0)$是原点，即正比例函数 $y=kx$ 的图像是经过原点的一条直线.

例 2 已知关于 x 的一次函数 $y=(2k-1)x+(2k+1)$.

（1）当 k 满足什么条件时，函数 y 的值随 x 的值的增大而增大？

（2）当 k 取何值时，$y=(2k-1)x+(2k+1)$的图像经过原点？

（3）当 k 满足什么条件时，函数 $y=(2k-1)x+(2k+1)$的图像与 y 轴的交点在 x 轴的下方？

解：（1）当 $2k-1>0$ 时，y 的值随 x 的值的增大而增大.

解 $2k-1>0$，得

大家谈谈

实际上是让学生通过观察，总结出直线 $y=kx+b$ 与纵轴交点的坐标与常数 b 的关系，由此进一步确认正比例函数图像是过坐标原点的一条直线.

* * * * * * * * * * *

（1）按教材上现有的安排，让学生将函数 $y=2x+3$ 和 $y=\frac{1}{2}x-2$ 的图像画在同一个坐标系中，而将函数 $y=-2x+4$ 和 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 的图像画在另一个坐标系中；

（2）让学生将函数 $y=2x+3$ 和 $y=-2x+4$ 的图像画在同一个坐标系中，而将函数 $y=\frac{1}{2}x-2$ 和 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 画在另一个坐标系中；

（3）让学生将函数 $y=2x+3$，$y=\frac{1}{2}x-2$，$y=-2x+4$ 和 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 的图像画在同一个坐标系中，前两条直线用蓝色表示，后两条直线用红色表示.

可根据学生的情况决定采用哪一种形式.

做一做

$$-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}.$$

练 习

1. (1) $\because -3<0$，$\therefore y$ 的值随 x 的值的增大而减小；
(2) $\because 3>0$，$\therefore y$ 的值随 x 的值的增大而增大；
(3) $\because 3-\pi<0$，$\therefore y$ 的值随 x 的值的增大而减小；
(4) $\because 0.5>0$，$\therefore y$ 的值随 x 的值的增大而增大.

2. (1) $k=\frac{1}{2}$.　(2) $k<0$.

习 题

A 组

1. $k<-1$.
2. 图像略. (1) 减小，下降.
(2) $x>1$.
(3) $0<y<3$.

$$k>\frac{1}{2}.$$

(2) 当 $2k+1=0$，即 $k=-\frac{1}{2}$ 时，函数 $y=(2k-1)x+(2k+1)$ 的图像经过原点.

(3) 当 $2k+1<0$ 时，函数 $y=(2k-1)x+(2k+1)$ 的图像与 y 轴的交点在 x 轴的下方.

解 $2k+1<0$，得

$$k<-\frac{1}{2}.$$

做一做

在例 2 中，如果 y 的值随 x 的值的增大而减小，且函数图像与 y 轴的交点在 x 轴的上方，求 k 的取值范围.

练 习

1. 判断下列函数中，y 的值随 x 的值增大而变化的情况.

(1) $y=-3x+3$；　(2) $y=3x-3$；

(3) $y=(3-\pi)x$；　(4) $y=0.5x$.

2. 已知关于 x 的一次函数 $y=kx+4k-2$.

(1) 如果函数的图像经过原点，求 k 的值.

(2) 如果 y 的值随 x 的值的增大而减小，求 k 的取值范围.

习 题

A 组

1. 已知一次函数 $y=(k+1)x-1$，y 的值随 x 的值增大而减小，求 k 的取值范围.

2. 画出函数 $y=-3x+3$ 的图像，结合图像回答下列问题：

(1) y 的值随 x 的值增大而________（填“增大”或“减小”），图像从左到右逐渐________（填“上升”或“下降”）.

94 | 数学　八年级下册

* * * * * * * * * * * *

2. 学生从发现一次函数图像的倾斜方向由 k 为正数还是负数决定，到总结出一次函数的性质，期间还有一个过渡，那就是在脑子里有一个“形”的确认：当图像越往右的同时越往上，就是函数随自变量的增大而增大；当图像越往右的同时越往下，就是函数随自变量的增大而减小. 教学中应把这个过渡做好，做充分.

3. 关于一次函数 $y=kx+b$ 的图像与 y 轴的交点和常数 b 的关系，也是要充分借助于对图像的观察来总结得出.

4. 可以说，本节内容的教学最为重要的一点就是：充分展现“数形结合”，这是发现数学规律的重要途径和手段.

(2) 当 $y<0$ 时，求 x 的取值范围.

(3) 当 $0<x<1$ 时，求 y 的取值范围.

3. 在同一直角坐标系中，画出一次函数 $y=-\frac{1}{2}x$，$y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{2}x-2$ 的图像，并回答：

(1) 各图像的位置有什么关系？

(2) 这种位置关系与函数表达式中的哪个量相关？

B 组

1. 在同一直角坐标系中，画出函数①$y=x+3$，②$y=x-3$，③$y=-x+3$，④$y=-x-3$ 的图像，并找出每两个函数图像之间的共同特征.

2. 某面食加工部每周用 10 000 元流动资金采购面粉及其他物品，其中购买面粉的质量在 1 500 kg～2 000 kg 之间，面粉的单价为 3.6 元/千克，用剩余款额 y 元购买其他物品．设购买面粉的质量为 x kg.

(1) 求 y 与 x 的函数关系式，并写出自变量的取值范围.

(2) 画出该函数的图像.

(3) 观察图像，写出购买其他物品的款额 y 的取值范围.

3. 图像略.

(1)三条直线互相平行.

(2)这种位置关系与表达式中的 k 有关，三个函数中的 k 值相等.

B 组

1. 图像略，直线①②互相平行，直线③④也互相平行；直线①③，①④互相垂直，直线②③，②④也互相垂直；四条直线围成一个正方形.

2. (1) $y=-3.6x+10\ 000$，$1\ 500\leqslant x\leqslant 2\ 000$.

(2)过两点(1 500，4 600)和(2 000，2 800)画线段.图像略.

(3) $2\ 800\leqslant y\leqslant 4\ 600$.

教学目标

1. 了解通过坐标系里两点的坐标，可以确定过这两点的直线所对应的一次函数关系式.

2. 会用待定系数法求一次函数的表达式.

观察与思考

这一活动的目的是让学生感悟用待定系数法求一次函数表达式的合理性.

21.3 用待定系数法确定一次函数表达式

通过直接列式可以求一次函数表达式. 当然，还有其他的方法求一次函数表达式. 本节将探究用待定系数的方法来求一次函数的表达式.

在图 21－3－1 中，直线 PQ 上两点的坐标分别为 $P(-20,5)$，$Q(10,20)$. 怎样确定这条直线所对应的一次函数表达式呢?

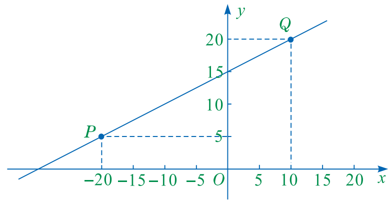


图 21－3－1

观察与思考

阅读下面小惠对此问题的解答过程，并验证小惠求得的一次函数表达式是否正确.

小惠的解答过程如下：

设这个一次函数表达式为 $y=kx+b$.

因为 P，Q 为直线上的两点，所以这两个点的坐标都满足表达式 $y=kx+b$，即

$$\begin{cases}5=-20k+b,\\20=10k+b.\end{cases}$$

解这个关于 k 和 b 的二元一次方程组，得

$$\begin{cases}k=\dfrac{1}{2},\\b=15.\end{cases}$$

所以，这个一次函数表达式为

$$y=\frac{1}{2}x+15.$$

像这样先设出函数表达式，再根据已知条件确定表达式中未知的系数，从而求出函数表达式的方法，叫做待定系数法.

教学建议

用待定系数法求一次函数的表达式，作为一种方法，学生并不难掌握，但要真正理解其根据和道理，又不是很容易的. 其基本依据是：第一，一次函数 $y=kx+b$ 与坐标系里不平行于坐标轴的直线（即该函数的图像）是一一对应的；第二，当坐标系里一条与坐标轴不平行的直线上两点的坐标，满足某一关系式 $y=kx+b$ 时，则该直线上所有点的坐标，也一定都满足这一关系式. 本节的内容，是让学生承认以上两点，而把待定系数法的恰当运用作为主要目标. 实际教学，应把握好分寸.

1. 首先，回忆一次函数的图像及作法，指出每一个一次函数的图像都是直角坐标系里的一条不与坐标轴平行的直线，且不同的一次函数，它们的图像也不相同；反过来，坐标系里每一条不与坐标轴平行的直线，也必然是某一个一次函数的图像. 这层意思，可由教师以学生

做一做

1. 已知 $A(-20, 5)$ 为正比例函数 $y=kx$ 图像上的一点，求这个正比例函数的表达式.

2. 已知一个一次函数的图像经过点 $M(0, 1)$ 和 $N(1, 0)$，求这个一次函数的表达式.

例 一辆汽车匀速行驶，当行驶了 20 km 时，油箱剩余 58.4 L 油；当行驶了50 km时，油箱剩余 56 L 油. 如果油箱中剩余油量 y(L)与汽车行驶的路程 x(km)之间是一次函数关系，请求出这个一次函数的表达式，并写出自变量 x 的取值范围以及常数项的意义.

解：设所求一次函数的表达式为 $y=kx+b$. 根据题意，把已知的两组对应值(20，58.4)和(50，56)代入 $y=kx+b$，得

$$\begin{cases}58.4=20k+b,\\56=50k+b.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}k=-0.08,\\b=60.\end{cases}$$

这个一次函数表达式为 $y=-0.08x+60$.

因为剩余油量 $y\geqslant 0$，所以 $-0.08x+60\geqslant 0$. 解得 $x\leqslant 750$.

因为路程 $x\geqslant 0$，所以 $0\leqslant x\leqslant 750$.

因为当 $x=0$ 时，$y=60$，所以这辆汽车行驶前油箱存油 60 L.

大家谈谈

用待定系数法求一次函数表达式的步骤有哪些？与同学交流你的看法.

用待定系数法求一次函数的表达式，一般步骤如下：

(1) 设一次函数表达式 $y=kx+b$.

(2) 根据条件，列出关于 k 和 b 的二元一次方程组.

(3) 解这个方程组，求出 k 与 b 的值，从而得到一次函数表达式.

做一做

这一活动的目的是让学生自己试着使用待定系数法，来求出一次函数的关系式.

1. $y=-\frac{1}{4}x$.

2. $y=-x+1$.

大家谈谈

应先让学生自己总结用待定系数法求一次函数表达式的方法步骤，再经大家讨论获得共同认识.

* * * * * * * * * * *

易于理解的方式扼要说明.

2. 给出一个一次函数，在坐标系里画出它的图像，是通过“以表达式找出两组对应值”—“以对应值为坐标在坐标系里确定出两点”—“过这两点连接直线”这样的步骤得出的. 现在的问题是反过来，即给出坐标系里一条直线，哪一个一次函数恰好以它为图像？

3. 可先引导学生思考：(1)若该直线是某一个一次函数的图像，那么这个函数的表达式的基本形式应当是怎样的？(2)怎样由直线上已知的两点的坐标，求出对应的一次函数中 k 和 b 的值呢？（想方程）

然后让学生自己寻找解决方法，若有学生想出与小惠同样的方法，可就势让大家展开讨论；若没有学生想出，则可阅读小惠的做法，然后讨论.

练 习

1. $y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$.

2. (1) $y=40x+800$.

(2) $40x+800=3\ 200$，$x=60$. 有 60 人参加了比赛.

习 题

A 组

1. -7.

2. (1) $y=-\frac{1}{2}x$.

(2) $y=\frac{10}{3}x+\frac{4}{3}$.

3. $y=-2x+2$.

B 组

(1) $y=1.6x+11$.

(2) 配套. 因当 $x=42.0$ 时，$y=1.6\times42.0+11=78.2$，所以配套.

练 习

1. 一次函数的图像经过点 $A(1,\ 2)$ 和点 $B(-2,\ 1)$，求这个函数的表达式.

2. 某市举办一场中学生羽毛球比赛，场地和耗材需要一些费用. 场地费 b(元)是固定不变的. 耗材费用与参赛人数 x(人)成正比例函数关系. 这两部分的总费用为 y(元). 已知当 $x=20$ 时，$y=1\ 600$；当 $x=30$ 时，$y=2\ 000$.

(1) 求 y 与 x 之间的函数关系式.

(2) 当支出总费用为 3 200 元时，有多少人参加了比赛?

习 题

A 组

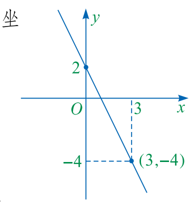
1. 如果一次函数 $y=(k+3)x-13$ 的图像上一点 P 的坐标为 $(-5,\ 7)$，那么 k 的值为________.

2. 求下列函数的表达式：

(1) 正比例函数的图像经过点 $(2,\ -1)$.

(2) 一次函数的图像经过点 $(-1,\ -2)$ 和 $(\frac{1}{2},\ 3)$.

3. 已知一次函数的图像如图所示，求这个函数的表达式.



(第 3 题)

B 组

为保护学生的视力，供学生使用的课桌和椅子的高度均需按一定的关系配套设计. 研究表明：课桌高度 y(cm)与椅子高度 x(cm)具有一次函数关系. 今有两套符合条件的课桌和椅子，其高度如下表所示：

项 目	第一套	第二套
x/cm	40.0	37.0
y/cm	75.0	70.2

(1) 试确定 y 与 x 的函数关系式.

(2) 现有一把高为 42.0 cm 的椅子和一张高为 78.2 cm 的课桌，它们是否配套？为什么？

* * * * * * * * * * * *

4. 学生独立完成“做一做”后，师生共同研习例题的解决，目的都是通过具体操作来掌握待定系数法的应用步骤.

5. 通过总结上述各问题的解决过程，引导学生认识：用待定系数法求一次函数表达式，不管条件是以什么形式给出的，都必须满足：(1)能确定要求的函数是一次函数，(2)知道该函数的两组对应值.

21.4 一次函数的应用

利用一次函数这一数学模型，可以解决许多与其相关的实际问题和数学自身的问题.

某公司与销售人员签订了这样的工资合同：工资由两部分组成，一部分是基本工资，每人每月 3 000 元；另一部分是按月销售量确定的奖励工资，每销售 1 件产品，奖励工资 10 元.

试着做做

1. 设某销售员月销售产品 x 件，他应得的工资记为 y 元. 求 y 与 x 之间的函数关系式.

2. 用求出的函数关系式，尝试解决下列问题：

（1）该销售员某月的工资为 4 100 元，他这个月销售了多少件产品？

（2）要想使月工资超过 4 500 元，该月的销售量应当超过多少件？

在上面的问题中，销售员的月工资数 y(元)与他当月销售产品数x(件)之间的函数关系式为 $y=10x+3\ 000$.

当销售员的月工资为 4 100 元时，有 $4\ 100=10x+3\ 000$. 解得 $x=110$.

要想使月工资超过 4 500 元，只要使 $10x+3\ 000>4\ 500$ 即可. 解得$x>150$.

一起探究

如图 21－4－1，某种称量体重的台秤，最大称量是 150 kg. 称体重时，体重 x(kg)与指针按顺时针方向转过的角 y(°)有如下一些对应数值：

x/kg	0	15	40	55	60
y/°	0	36	96	132	144

图 21－4－1

教学目标

1. 经历应用一次函数解决实际问题的过程.

2. 学会从文字、表格、图像等各种情境中捕捉数量关系，并恰当地表达出来.

3. 初步学会利用函数的意义与性质对问题进行判断和决策，增强运用函数解决问题的思想和意识.

试着做做

首先应让学生就所述情境涉及的数量及数量关系作深入分析，然后再去完成“试着做做”中提出的问题.

一起探究

重要的是，就所述情境的数量及表格所示的数量关系，学生应感悟到体重与指针转过的角度具有函数关系，且由“匀速”变化，推测出具有一次函数关系.

* * * * * * * * * * *

教学建议

函数是刻画两个变量之间的对应关系的，这是现实中极为普遍的一种数量关系的抽象，因而有着广泛的应用. 一次函数是对于自变量为“匀速”变化的函数，其反映的实际问题不仅大量存在，并且和我们的生活与生产密切相关，这决定了一次函数有着广泛的应用.

应用一次函数解决实际问题的基本过程是：(1)根据问题情境的数量关系建立相应的一次函数表达式，(2)利用一次函数的相关性质解决需要解决的问题. 显然，完成(1)是最为关键的一步. 而要得到一次函数的表达式，可通过直接列式，也可以借助待定系数法. “一次函数的应用”这节课的教学重点，就是要使学生把握如何地落实好以上两个过程.

对本节第一个课时，有如下的教学建议：

1. 对于“试着做做”，可以让学生先独立阅读题目，而后解决给出的问题. 活动中或活动

（1）请你在直角坐标系中，分别以上表中的每对对应数值为横坐标和纵坐标，描点连线，画出图像．

（2）求 y 与 x 之间的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围．

（3）当体重为多少千克时，台秤的指针恰好转到 $180°$的位置？当体重为 50 kg 时，台秤的指针转过的角度是多少？

由这些对应值画出的图像，如图 21－4－2 所示．

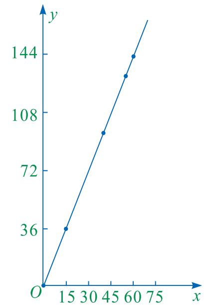


图 21－4－2

由表格给出的数据可以看出，体重为 0 kg 时，台秤指针指向 $0°$，每增加 5 kg，台秤指针按顺时针方向旋转 $12°$，所以 y 是 x 的正比例函数．根据条件可得

$$y=\frac{12}{5}x\ (0\leqslant x\leqslant 150).$$

当 $y=180$ 时，$180=\frac{12}{5}x$．解得 $x=75$．

当 $x=50$ 时，$y=\frac{12}{5}\times 50=120$．

即当体重为 75 kg 时，台秤的指针恰好转到 $180°$的位置；当体重为 50 kg 时，台秤的指针转过的角度是 $120°$．

练　习

1．某水库在春季播种前，向下游灌溉区开闸放水．放水量 $V(\mathrm{m}^3)$与放水时间$t(\mathrm{min})$之间有如下对应数据：

t/min	30	60	90	120	150
V/m^3	1 500	3 000	4 500	6 000	7 500

（1）求放水量 $V(\mathrm{m}^3)$与放水时间 $t(\mathrm{min})$之间的函数关系式．

（2）求放水 24 h 的放水量．

2．某出版社出版了一种适合中学生阅读的科普书．当该书首次出版的印数不少于 5 千册时，该出版社投入的成本 y(万元)与印数 x(千册)之间为一次函数关系，并有下表中的对应值：

练　习

1．(1)$V=50t$．

(2)$50\times 24\times 60=72\ 000(\mathrm{m}^3)$．

2．(1)$y=0.25x+1.6$；

(2)当 $y=4.1$ 时，$x=10$，能印 10 千册．

＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊

后，应通过学生相互交流和教师的引导，使学生感悟以下几点：

(1)用列式法求函数表达式，可采用“逐步抽象法”，如：营销员的月工资 y(元)＝按月销售量 x(件)确定的奖励工资(售 1 件奖励 10 元)＋月基本工资 3 000(元)，即 $y=10x+3\ 000$．

(2)当有了函数的表达式之后，要求某一函数值对应的自变量的值时，就是解该函数值所对应的自变量的方程；要求函数值大于(或小于)某确定的值时自变量的取值范围，就是解这些函数值所对应的自变量的不等式．

(3)本题函数表达式的确定，也可以利用待定系数法，这是因为：①由函数对自变量是“匀速”变化的，可知为一次函数；②可确定两组对应值，如(0，3 000)，(1，3 010)．

x/千册	6	8
y/万元	3.1	3.6

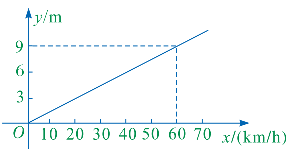
(1) 求 y(万元)与 x(千册)之间的函数关系式.

(2) 当出版社投入成本 4.1 万元时，能印该书多少千册?

习 题

A 组

1. 一个长方形的长、宽分别为 60 和 40. 现将它的宽减少 10，长增加 x. 设变化后的长方形的面积为 y.
   (1) 写出 y 与 x 之间的函数关系式.
   (2) 当 x 取何值时，变化后的长方形与原来的长方形的面积相等?
   (3) 当 x 取哪些值时，可以使变化后的长方形的面积比原来的长方形面积的 2 倍还要大?
2. 一辆中型客车，准乘 21 人(包括一名司机和一名乘务员). 这辆客车由 A 地行驶到 B 地，油费为 45 元，高速公路费为 20 元，其他运行成本为 42 元，每人票价 25 元. 设乘客为 x 人时，盈利为 y 元.
   (1) 写出 y 与 x 之间的函数关系式.
   (2) 至少要有多少名乘客才能保证不亏本? 若载满了乘客，可获利多少元?
3. 汽车在刹车后都会由于惯性继续向前滑行一段距离，我们将其称为“刹车距离”. 某型号轿车的“刹车距离” y(m)与速度 x(km/h)的关系如图所示.



(第 3 题)

   (1) 写出 y 与 x 之间的函数关系式.
   (2) 要使刹车距离不超过 12 m，车速应当保持在哪个范围内?

B 组

某市为鼓励市民节约用水，自来水公司采用分段收费标准收费，每月收取水费 y(元)与用水量 x(t)之间的函数关系如图所示.

第二十一章 一次函数 | 101

习 题

A 组

1. (1) $y=30(x+60)=30x+1\ 800$.
   (2) $30x+1\ 800=40\times60$，$x=20$. 当 $x=20$ 时，变化后的长方形的面积与原来的长方形的面积相等.
   (3) $30x+1\ 800>2\times40\times60$，$x>100$.
   所以，当 $x>100$ 时，变化后的长方形的面积比原来的长方形面积的 2 倍还要大.
2. (1) $y=25x-107$.
   (2) 据题意：$25x-107\geqslant0$，$x\geqslant4\dfrac{7}{25}$，至少要有 5 名乘客才能保证不亏本. 若载满了乘客，可获利 368 元.
3. (1) $y=\dfrac{3}{20}x$.
   (2) 据题意：$\dfrac{3}{20}x\leqslant12$，$x\leqslant80$. 车速应不超过 80 km/h.

* * * * * * * * * * * *

2. 对于“一起探究”的教学，应使学生体会到以下几点：

(1)学会读表：①看明白 x 与 y 之间的对应关系；②从中看出 y 对于 x 是“匀速”变化的，从而确定是一次函数(实际上是正比例函数).

(2)本题也可以用待定系数法来确定该一次函数的表达式.

(3)一次函数表达式确定后，由自变量的值求其对应的函数值，就是“求代数式的值”；由函数值求对应到它的自变量的值，就是要解方程.

3. 在学习本节内容与解决方法的基础上，应引导学生体会函数、方程、不等式之间的关系. 在许多情况下，函数反映的是某个过程中两个变量之间的对应关系，而方程反映的是这个过程中某一特定值(即刻)之间的对应；不等式反映的是这个过程中某一段落(区间)两个量之间的对应.

B 组

(1) 当 $0\leqslant x\leqslant 10$ 时，$y=\frac{11}{5}x$. $x=7$，

$y=\frac{11}{5}\times 7=15.4$(元)；

(2) 当 $x>10$ 时，

$y=3.5x-13$，

据题意：$29=3.5x-13$，

$x=12$；又 $19.8=\frac{11}{5}x$，

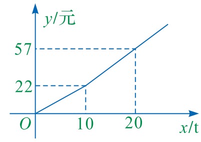
$x=9$，$12-9=3$. 所以 4 月份比 3 月份节约用水 3 吨.

大家谈谈

当 $x>5$ 时，$y=25(x-3)$ 的图像在 $y=10x$ 的图像的上方，说明乙出发 2 小时后，乙可以超过甲. 还可以用 $25z>10(z+3)$ 来解决这个问题，其中 z 表示乙离开出发地的时间.

(1) 小兰家 7 月份用水 7 t，应交水费多少元？

(2) 按上述分段收费标准，小兰家 3 月份和 4 月份分别交水费 29 元和 19.8 元. 小兰家 4 月份比 3 月份节约用水多少吨？



例 甲骑自行车以 10 km/h 的速度沿公路行驶，出发 3 h 后，乙骑摩托车从同一地点出发沿公路与甲同向行驶，速度为25 km/h.

(1) 设甲离开出发地的时间为 x(h)，求：

①甲离开出发地的路程 y(km)与 x(h)之间的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围.

②乙离开出发地的路程 y(km)与 x(h)之间的函数关系式，并指出自变量 x 的取值范围.

(2) 在同一直角坐标系中，画出(1)中两个函数的图像，并结合实际问题，解释两图像交点的意义.

解：(1) 由公式 $s=vt$，得

①甲离开出发地的路程 y 与 x 的函数关系式为

$$y=10x.$$

自变量 x 的取值范围为 $x\geqslant 0$.

②乙离开出发地的路程 y 与 x 的函数关系式为

$$y=25(x-3)，即\ y=25x-75.$$

自变量 x 的取值范围为 $x\geqslant 3$.

(2) 以上两个函数的图像如图 21 - 4 - 3 所示. 两个函数图像的交点坐标是(5，50)，即甲出发 5 h 后被乙追上(或乙出发 2 h 后追上甲). 此时，两人距离出发地 50 km.

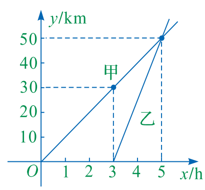


图 21 - 4 - 3

大家谈谈

对于上例中甲、乙行驶的情况，你能借助图 21 - 4 - 3 解释“乙出发多少小时后可以超过甲”这一问题吗？还有其他方法解答这个问题吗？

* * * * * * * * * * *

教学建议

本课时研究的主要内容，是在同一个问题情境中出现两个一次函数，借助对两个一次函数进行某种比较，解决有关的问题. 在这个过程中，又常利用在同一坐标系里画出两个函数的图像，使两个函数的比较以直观的形式呈现出来，这又一次展现了“数形结合”的美妙作用.

1. 对于例题的教学，应突出以下两点：

(1) 可先让学生读题后自己来解决问题(1)，对于其中的②，会有一些学生写成 $y=25(x-3)$，还会有一些学生写成 $y=25x$，造成这些差别的原因是 x 到底表示的是甲行驶的时间还是乙行驶的时间，这正是要让学生通过“讨论与辨析”彻底搞清楚的地方.

(2) 尽可能让学生自己在同一坐标系里画出两个函数的图像，进而讨论两图像的关系(相交、在上面、在下面)与 $25(x-3)=10x$，$25(x-3)>10x$，$25(x-3)<10x$ 之间有怎样

由此可以看出，有些一元一次方程和一元一次不等式问题，可以借助一次函数来考虑．借助一次函数的图像，往往能使方程和不等式的意义更加直观和形象．

一起探究

某电脑工程师张先生准备开一家小型电脑公司，欲租一处临街房屋．现有甲、乙两家出租屋，甲家已经装修好，每月租金为 3 000 元；乙家未装修，每月租金为 2 000 元，但若装修成与甲家房屋同样的规格，则需要花装修费 4 万元．

（1）设租用时间为 x 个月，承租房屋所付租金为 y 元，分别求租用甲、乙两家的租金 y 与租用时间 x 之间的函数关系式．

（2）根据求出的两个函数表达式，试判断租用哪家的房屋更合算．

小亮的做法

（1）租用甲家房屋时，$y=3\ 000x$；租用乙家房屋时，$y=2\ 000x+40\ 000$．

（2）①由 $3\ 000x=2\ 000x+40\ 000$，解得

$$x=40.$$

即当租用 40 个月时，无论是租用哪一家，租金都相同．

②由 $3\ 000x>2\ 000x+40\ 000$，解得

$$x>40.$$

即当租用时间超过 40 个月时，租乙家的房屋更合算．

③由 $3\ 000x<2\ 000x+40\ 000$，解得

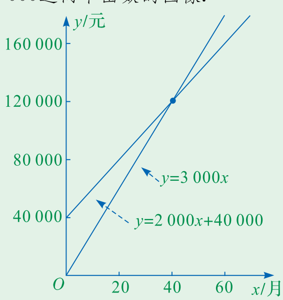
$$x<40.$$

即当租用时间少于 40 个月时，租甲家的房屋更合算．

小丽的做法

（1）同小亮的做法．

（2）在同一直角坐标系中，分别画出 $y=3\ 000x$，$y=2\ 000x+40\ 000$这两个函数的图像．



观察图像可知，当租用 40 个月时，甲、乙两家的租金相同；当租用时间超过 40 个月时，租乙家的房屋更合算；当租用时间少于 40 个月时，租甲家的房屋更合算．

第二十一章　一次函数 | 103

一起探究

应让学生自己先思考如何解决这个问题，确定解决方案，然后再阅读小亮与小丽的做法．

* * * * * * * * * * * *

的对应．

2. 关于“一起探究”的教学，应当从如下两个方面展开并使认识强化：

（1）用数学解决现实问题，很重要的一项任务就是求得某个过程的优化方案，“一起探究”所给出的就是这样一个问题情境．而优化方案的获得，多是以“比较”为基础或手段的．教学应从这一基本认识开始，并使这一认识得到强化．

（2）数学中的“比较”，主要有两条途径，一是通过数量相减比大小，$a-b>0$，$a-b=0$，$a-b<0$ 分别对应于 $a>b$，$a=b$，$a<b$；二是借助图形关系比大小（如用叠合法比较两条线段的长短和两个角的大小）．两个一次函数比较大小，用“式”比较和用“图像”比较，正与上述两条途径一脉相承．我们的教学，可以并且应当让学生从更广的范围、更高的层次认识数学知识和数学方法的关联性与一致性．

大家谈谈

小亮是借助“式的比较”，小丽是借助“图像的比较”.

练 习

1. (1) $m=25x+150\ 000$，$n=40x$.

(2) $40x>25x+150\ 000$，$x>10\ 000$. 至少生产并销售 10 000 件以上，工厂才会有盈利.

2. (1) 甲行驶了 4.5 h 到达 B 地，乙行驶了 6 h 到达 A 地.

(2) 甲：$s=8t$.

乙：$s=-6t+36$.

(3) 交点 $\left(2\frac{4}{7},20\frac{4}{7}\right)$，甲、乙两人在出发 $2\frac{4}{7}$ h 的时候，在离 A 地 $20\frac{4}{7}$ km 处相遇.

习 题

A 组

1. 设学校购买电脑 x 台，

* * * * * * * * * * *

大家谈谈

小亮和小丽的做法有什么不同？你是怎么做的？与同学交流你的做法.

练 习

1. 某工厂开发生产一种新产品，前期投入 150 000 元. 生产时，每件成本为 25 元，每件销售价为 40 元. 设生产 x 件时，总成本(包括前期投入)为 m 元，销售额为 n 元.

(1) 分别求出 m，n 与 x 之间的函数关系式.

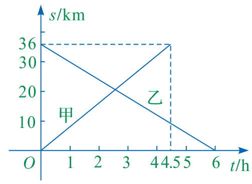
(2) 至少生产并销售多少件产品后，工厂才会有盈利？

2. A，B 两地相距 36 km，甲、乙二人分别从 A 地和 B 地同时出发，相向而行. 他们距 A 地的路程 s(km)和出发后的时间 t(h)之间的函数关系的图像如图所示.

(1) 甲行驶了几小时到达 B 地，乙行驶了几小时到达 A 地？

(2) 分别写出甲、乙二人距 A 地的路程 s 与时间 t 之间的函数关系式.

(3) 求出两个图像交点的坐标，并解释交点坐标所表示的实际意义.



(第 2 题)

习 题

A 组

1. 某学校欲购置一批标价为 4 800 元的某型号电脑，需求数量在 15 至 25 台之间. 经与两个专卖店商谈，甲店同意打八折；乙店承诺先赠一台，其余打九折. 这所学校购买哪家的电脑更合算？

2. 某工厂有甲、乙两个净化水池，容积都是 480 m^3. 注满乙池的水得到净化可以使用时，甲池未净化的水已有 192 m^3. 此时，乙池以 10 m^3/h 的速度将水放出使用，而甲池仍以 8 m^3/h 的速度注水. 设乙池放水为 x h 时，甲、乙两池中的水量用 y m^3 表示.

(1) 分别写出甲、乙两池中的水量 y 关于 x 的函数关系式及自变量 x 的取值范围，并在同一直角坐标系中画出这两个函数的图像.

(2) 借助由(1)得出的图像回答：

①当 x 取何值时，甲、乙两池水量相等？

②当 x 取哪些值时，甲池的水量少于乙池的水量？

③当 x 取哪些值时，甲池的水量多于乙池的水量？

B 组

某种子商店销售一种小麦种子，为促销，推出了两种销售方案供采购者选择.

方案一：小麦种子的价格为 4 元/千克，无论购买多少均不打折.

方案二：购买 3 kg 以内(含 3 kg)，价格为 5 元/千克；若一次性购买超过3 kg，则超过 3 kg 的部分价格打七折.

(1) 求出方案一中购买的小麦种子的数量 x(kg)和付款金额 y(元)之间的函数关系式.

(2) 若你去购买一定量的这种小麦种子，你会选择哪个方案？说明理由.

所需资金 y 元，据题意得，

甲：$y=3\ 840x$，

乙：$y=4\ 320(x-1)$，

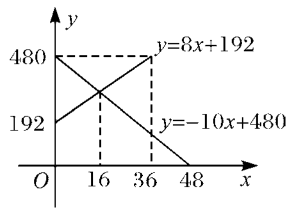
由 $3\ 840x>4\ 320(x-1)$，得 $x<9$.

而学校需要数量在 15～25 台之间，所以在甲店购买电脑更合算.

2. (1) 甲：$y=8x+192$，$0\leqslant x\leqslant 36$.

乙：$y=-10x+480$，$0\leqslant x\leqslant 48$.

图像如图所示：



(2) ① $x=16$；

② $0\leqslant x<16$；

③ $16<x\leqslant 36$.

B 组

(1) 方案一：$y=4x$.

(2) 方案二：当 $0\leqslant x\leqslant 3$ 时，$y=5x$，

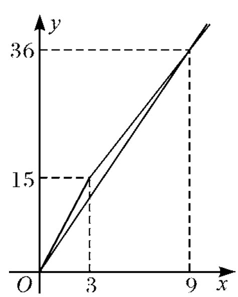
当 $x>3$ 时，$y=3.5x+4.5$.

函数图像如图所示，由此看出：

当 $0\leqslant x\leqslant 9$ 时，选方案一.

当 $x=9$ 时，两个方案任选其一即可.

当 $x>9$ 时，选方案二.



21.5 一次函数与二元一次方程的关系

一次函数与二元一次方程之间具有密切的联系，用不同的观点进行解释，二者可以互相转化.

观察与思考

1. 二元一次方程 $x+y=1$ 有无数组解，如

$\begin{cases}x=-2,\\y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=-2\end{cases}$

等，都是这个方程的解.

如图 21-5-1，以这些解为点的坐标，在直角坐标系中描点. 你认为这些点在一条直线上吗？如果在一条直线上，它们在哪条直线上？请说明理由.

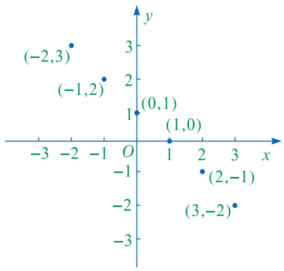


图 21-5-1

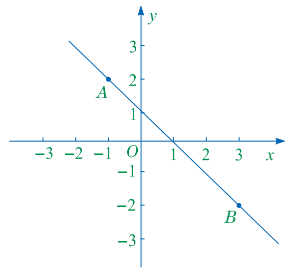


图 21-5-2

2. 如图 21-5-2，在直角坐标系中，设点 A 的坐标为$(-1,\ 2)$，点 B 的坐标为$(3,\ -2)$，经过点 A，B 画直线. 直线 AB 上的点 $C(x_0,\ y_0)$ 中，x_0，y_0之间有怎样的数量关系？$\begin{cases}x=x_0,\\y=y_0\end{cases}$是不是方程 $x+y=1$ 的一组解？请说明理由.

一般地，如果以二元一次方程 $ax+by=c$ 的解为坐标，在直角坐标系中

教学目标

1. 体会一次函数与二元一次方程的关系.

2. 感悟数学知识之间的内在联系.

3. 认识到通过建立两个变量的一次等式（即二元一次方程），就可得到它们之间的一次函数关系.

观察与思考

目的是引导学生体会：以二元一次方程的所有的解为坐标对应的点集，是坐标系里的一条直线，这条直线是一个一次函数的图像，从形的角度显示一次函数与二元一次方程的统一性.

* * * * * * * * * * *

教学建议

对于二元一次方程和一次函数的关系，可以从三个角度来看：

函数角度：在关于 x 和 y 的二元一次方程 $ax+by=c$（a，b 均不为 0）中，对于 x 的每一个值，都有 y 的唯一确定的值与之对应，可知变量 y 是变量 x 的函数. 可见，二元一次方程实际上是确定了两个未知量（变量）间的一种函数关系.

方程角度：一次函数 $y=kx+b$（k，b 为常数，$k\neq0$），可变形为二元一次方程的标准形式 $y-kx=b$，一般地，一次函数 $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$ 可以变形为 $ax+by=c$（a，b 均不为 0）. 由此看来，二元一次方程与一次函数完全是等价的.

图形角度：从对应的"形"来看，以满足二元一次方程 $ax+by=c$ 的有序数对（解）为坐标的点集，恰好是一次函数 $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$ 的图像.

画点，那么这些点在一条直线上．反过来，如果取定这个方程的两组解，那么过以这两组解为坐标的两点画出的直线，此直线上点的坐标组成的一组值是这个二元一次方程的一组解.

因此，以二元一次方程的解为坐标的点在一条直线上.

一起探究

1．一次函数 $y=kx+b$ 图像上的一个点的坐标是不是二元一次方程 $kx-y=-b$ 的一组解？请说明理由.

2．以二元一次方程 $ax+by=c$ 的解为坐标所构成的直线，是不是一次函数 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ 的图像？请说明理由.

3．你认为二元一次方程和一次函数有什么联系与区别？与同学交流你的看法.

事实上，我们把二元一次方程 $ax+by=c$ 变形为 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ 后，原来的二元一次方程就化成了一次函数的形式．当 x，y 表示未知数时，$ax+by=c$ 就是二元一次方程；当 x，y 表示变量时，$y=-\frac{a}{b}x+\frac{c}{b}$ 就是一次函数．并且，有如下结论：

以二元一次方程的解为坐标的点都在与它对应的一次函数的图像上；反过来，一次函数图像上的点的坐标都是与它对应的二元一次方程的解.

做一做

1．方程 $2x+3y=5$ 有多少组解？请填写下表，并把每一组对应值作为点的坐标，在图 21－5－3 所示的直角坐标系中描出各点.

x	…	-2	-1	0	1	2	2.5	…
y	…							…

2．在上题直角坐标系中画出函数 $y=-\frac{2}{3}x+$

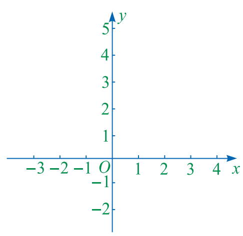


图 21－5－3

一起探究

目的是使学生搞清楚：第一，从式的变形角度认识一次函数与二元一次方程的一致性；第二，从图像和解集对应的点集的重合，认识一次函数与二元一次方程的一致性.

做一做

让学生通过活动体会：二元一次方程与对应的一次函数，从坐标系里的图形角度看，是完全一致的.

1. 方程 $2x+3y=5$ 有无数组解．填表，描点略.

2. 图像略.

3. 是．理由略.

* * * * * * * * * * *

本教材主要是通过“形”的统一来揭示两者的等价关系.

1.“观察与思考”是通过一个具体的例子来说明：以一个二元一次方程的解（有序数对）为坐标的点，它们的集合恰好是坐标系里的一条直线．为此，引导学生通过画图、观察、操作，获得两个方面的感悟和认同，一是该方程所有的解对应的点，都在同一条直线上；二是该直线上的每一个点的坐标，又恰好是这个二元一次方程的解．这一段所安排的两种活动，正是为实现以上两个方面的感悟和认同而设置的．应该清楚，学生进行以上两个方面的操作与验证，都只能是感知性的，带有“猜测”的色彩，即是“合情”思考，而不可能是严密推理性的.

2.“一起探究”是要实现对“二元一次方程和一次函数具有等价关系”的确认．前两个问题引导学生感悟二元一次方程解集对应的直线就是相应的一次函数的图像，由此获得第三个问题的答案：两种形式所表达的关系是一致的，只是表达方式与考察视角的不同.

$\frac{5}{3}$的图像.

3. 以方程 $2x+3y=5$ 的解为坐标的点是否都在函数 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$ 的图像上？为什么？

练　习

1. 把二元一次方程 $2x-3y=4$ 改写成一次函数 $y=kx+b$ 的形式，并画出这个一次函数的图像.

2. 写出二元一次方程 $2x-y=1$ 的三个解，以方程的解为坐标在直角坐标系中画点，这些点是否都在一次函数 $y=2x-1$ 的图像上？

习　题

A　组

1. 已知一次函数 $y=ax+5$ 和 $y=-x+b$ 的图像交于点 $P(1,\ 2)$.

（1）直接写出方程组 $\begin{cases} ax-y=-5, \\ y+x=b \end{cases}$ 的解.

（2）求 a，b 的值.

2. 把二元一次方程 $2(x-3)+y=0$ 改写成一次函数 $y=kx+b$ 的形式，并画出这个一次函数的图像.

B　组

1. 解方程组 $\begin{cases} 2x-y=2, \\ y+2x=6, \end{cases}$ 并由此指出在同一直角坐标系内，一次函数 $y=2x-2$ 与 $y=-2x+6$ 图像交点的坐标.

2. 已知关于 x，y 的方程组 $\begin{cases} x+y=1, \\ ax+3y=8 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=-1, \\ y=2. \end{cases}$

（1）写出一次函数 $y=-x+1$ 和 $y=-\frac{a}{3}x+\frac{8}{3}$ 的图像交点 P 的坐标.

（2）若这两个函数的图像与 x 轴分别交于点 A，B，求 $S_{\triangle ABP}$.

练　习

1. $y=\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$，图像略.

2. $\begin{cases} x=0, \\ y=-1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$（答案不唯一）

都在. 画图略.

习　题

A 组

1. (1) $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$

(2) $a=-3$，$b=3$.

2. $y=-2x+6$，图像略.

B 组

1. $\begin{cases} x=2, \\ y=2. \end{cases}$

交点坐标为 $(2,2)$.

2. (1) $P(-1,2)$.

(2) $A(1,0)$，$B(-4,0)$，$S_{\triangle ABP}=5$.

* * * * * * * * * * *

数学活动

匀速变化和一次函数

设 y 是 x 的函数，x_1，x_2 是自变量 x 取值范围内的两个值，当 x 由 x_1 变化到 x_2 时，对应的 y 值由 y_1 变化到 y_2，我们称比值

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

为 y 在 x_1 与 x_2 之间的平均变化速度．当 y 在自变量 x 取值范围内任意两值之间的平均变化速度是同一个数时，我们称 y 为 x 的匀速变化的函数．

活动一：

1．说明 $y=-2x+1$ 是匀速变化的函数．

2．试说明一次函数 $y=kx+b$ 是匀速变化的函数．

活动二：

1．小刚骑自行车去上学，骑行时间 t(min)和所行路程 s_1(km)之间的关系如下表：

时间 t/min	1	2	3	4	5	…	16.5
路程 s_1/km	0.4	0.6	0.8	1	1.2	…	3.5

我们已经知道 s_1 是 t 的匀速变化的函数．

(1) 说明 s_1 是 t 的一次函数．

(2) 设小刚家到学校的路程为 3.5 km，小刚行驶过程中距学校的路程为 s_2(km)．先说明 s_2 是 t 的匀速变化的函数，再说明它是一次函数．

2．试说明如果 y 是 x 的匀速变化的函数，那么 y 是 x 的一次函数．

由活动一和活动二可知，一次函数是匀速变化的函数；反过来，匀速变化的函数是一次函数．因此，如果知道一个函数是匀速变化的，我们就可以用待定系数法求这个一次函数的表达式．

活动三：

一种大棚蔬菜处在 0 ℃以下的气温条件下超过 3.3 h，就会遭受冻害．秋末某天，气象台发布了如下的降温预报：0 时至次日 5 时，气温将由 3 ℃下降到 −3 ℃；从次日 5 时至次日 8 时，气温又将由 −3 ℃上升到 5 ℃．如果气温在上述两个时间段内变化都是匀速的，你认为是否有必要对该大棚蔬菜采取防冻措施？请说明理由．

数学活动

活动一：1. 略.

2. 对于一次函数，$\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{kx_2-kx_1}{x_2-x_1}=k$.

变化率为常数 k.

当 k 为正数时，表明自变量增加一个单位，函数值增加 k 个单位；当 k 为负数时，表明自变量增加一个单位，函数值减少 $|k|$ 个单位.

活动二：1. (1) $s_1=0.2t+0.2$，变化率为 0.2，说明小刚每分钟行驶 0.2 km.

(2) $s_2=3.3-0.2t$，变化率为 −0.2，表明时间每过 1 分钟，小刚距学校的路程就减少 0.2 km.

2. 略.

活动三：由于假定气温在时间段[0，5]，[5，8]内都是匀速变化的．函数图像为过(0，3)，(5，−3)，(8，5)的折线段，可以看出从 2:30 到约 6:07 气温在 0 ℃以下．需要采取防冻措施.

* * * * * * * * * * *

说明：众所周知，形如 $y=kx+b$(k，b 为常数，$k\neq 0$)的函数称为一次函数，这可以说是一次函数的“形式定义”，但若对一次函数的理解只停留在这一“形式”层面，那显然是很不够的．事实上，概念是对一类事物本质特征的认识，而一次函数是对所有“匀速”变化的量关系的抽象模型，因此，一次函数这一知识是否被很好的掌握，其关键是能否把现实中和数学中众多的“匀速”变化，自觉地归结到一次函数，并自然流畅地“形式化”为规范的表达式.

本活动的目的，就在于引导学生把一次函数与现实中丰富多彩、千姿百态的“匀速”变化统一起来，以便他们从“数量关系”的本质特征上掌握一次函数，这将强化对函数模型的认识，也将提高对一次函数的应用意识及应用能力.

教学目标

1. 通过对本章知识的回顾与梳理，进一步感受一次函数这一数学模型既是源于实际，又是解决现实与数学中众多问题的基本工具.

2. 通过对一次函数的概念及其图像关系的再认识，进一步感受“数形结合”的美妙及其应用的广泛性.

3. 引导学生自主完成对一次函数的概念、性质、表达式的建立及其各种应用的回顾与总结，培养学生的学习能力，提高数学思维品质.

回顾与反思

一、知识结构

- 现实问题 — 一次函数
  - 图像与性质
  - 表达式
    - 直接列式法
    - 待定系数法
  - 应用
  - 一次函数与二元一次方程的关系

二、总结与反思

从现实问题建立一次函数模型是强化“符号意识”的过程，这个过程着重体现了抽象与模型化的思想. 一次函数的图像，不仅揭示了一次函数的性质，更重要的是凸显了“数形结合”的思想方法.

1. 一次函数是一类重要的函数.

2. 一次函数 $y=kx+b$ 的图像是直线，故其图像又称为直线 $y=kx+b$.

3. 一次函数 $y=kx+b$ 中的系数 k 与 b 决定着它的性质：

（1）当 $k>0$ 时，y 随 x 的增大而增大，图像从左向右是________的.

（2）当 $k<0$ 时，y 随 x 的增大而减小，图像从左向右是________的.

（3）当 $b=0$ 时，一次函数 $y=kx+b$ 化为正比例函数 $y=kx$，它的图像一定经过________.

（4）当 $b\neq 0$ 时，直线 $y=kx+b$ 一定不经过________.

4. 求一次函数的表达式至关重要，它是解决许多实际问题的关键环节. 求一次函数表达式的主要方法有：

（1）直接列式法：由问题的实际意义直接写出. 这种方法的实质是把问题中用文字叙述的数量关系用数学式表达出来.

（2）待定系数法：根据图像、表格或已知条件确认两个变量成一次函数关系，就可以将表达式设为 $y=kx+b$，利用两组对应值求出 k 与 b 的值.

5. 正比例函数是一次函数的特例，它们之间是一般与特殊的关系. 正比例函数具备一次函数所有的性质，它的特点在于图形必过原点，只需另一个点的坐标就可以确定其表达式.

6. 一次函数与二元一次方程的关系体现在：

（1）从形式上它们之间可以相互转化.

* * * * * * * * * * *

教学建议

学至本章，学生已进入八年级下学期的后半段，知识与自主学习经验都有了一定的积累，正是大幅提高学习能力的好时机，为此建议：

1. 在本节课前，布置学生通览全章，对本章知识进行归纳梳理，试着独立完成知识关联及结构图. 在本节课的开始，通过学生的汇总及师生的合作交流，更加深入地完成对本章知识的条分缕析，形成完整的关系网络及结构.

2. 本章“回顾与反思”的教学，不应满足于事项的泛泛罗列，而应当沿着如下两条路径，设计成有层次的系列问题，引导学生进行讨论，最后形成统一认识.

路径一，沿着知识的深化与细化的方向展开，如：

(1)关于一次函数的性质. ①分别根据一次函数的表达式及其图像说明它的性质. ②一

(2) 以二元一次方程的解为坐标的点都在与它对应的函数图像上；反过来，一次函数图像上的点的坐标都是与它对应的二元一次方程的解.

7. 一次函数有着广泛的实际应用. 掌握一次函数的应用有两个层次：

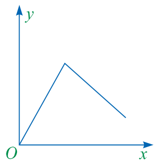
(1) 若给出了一次函数的表达式，则可直接应用一次函数的性质解决问题.

(2) 若问题只提供了一次函数的情境(有时是隐含的表述)，则一般应先求出函数表达式，进而利用性质解决问题.

三、注意事项

1. 对于一次函数的概念，要把握函数表达式是自变量的一次式，而与表示自变量的字母无关. 例如 $y=3x+1$，$s=2t-5$，$l=2\pi R$ 等都是一次函数.

2. 在实际问题中，有时会遇到两个或多个一次函数的图像拼接起来的图像，如图，它便是由两个一次函数的图像组合而成的. 对于其中的每一段，我们都可以利用一次函数来解决问题.



复 习 题

A 组

1. 填空：

(1) 直线 $y=3-9x$ 与 x 轴的交点坐标为________，与 y 轴的交点坐标为________.

(2) 若 $M(a, 2)$ 为一次函数 $y=2x-3$ 图像上的一点，则 $a=$________.

(3) 在函数 $y=x+4$ 中，若自变量 x 的取值范围是 $-3<x<-1$，则函数值 y 的取值范围为________.

(4) 汽车离开 A 站 5 km 后，又以 40 km/h 的平均速度行驶了 t h. 此时，汽车离开 A 站的路程为 s km. s 与 t 的函数关系式为________.

(5) 一棵树现在的高度为 2.2 m，且未来 10 年内会每年长高 25 cm. 设 x 年后的树高为 y m，则 y 与 x 的函数关系式为________，y 是 x 的________函数.

2. 解答下列各题：

(1) 已知四个点的坐标分别为(1，2)，(2，−1)，(0，3)，(2，2)，其中哪些点在直线 $y=-x+3$ 上?

复习题

A 组

1. (1) $\left(\frac{1}{3},0\right)$，(0，3).

(2) $\frac{5}{2}$.

(3) $1<y<3$.

(4) $s=40t+5$.

(5) $y=0.25x+2.2$，一次.

2. (1) (1，2)，(0，3)在直线上.

＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊

次函数的性质在解决实际问题时，是被如何应用的?

(2)关于求一次函数的表达式. ①什么情况适于用直接列式法，落实的方法是什么? ②什么情况适于用待定系数法，注意事项是什么? ③用列二元一次方程的方法可以得到一次函数的表达式吗? 举例说明.

(3)对于本章所体现的函数与方程(不等式)的诸多形式的联系，举例说明.

路径二，沿着知识形成与方法运用再概括的方向展开. 如：

(1)引导学生反思“函数初步认识——一次函数—对函数的更深认识”这一螺旋进程，感悟“函数模型”的意义及其广泛应用.

(2)引导学生反思“成正比的量—正比例函数——一次函数”所体现的认识发展过程，体会“从特殊到一般”认识规律的普遍意义.

(2) $y_1=\frac{5}{2}$, $y_2=1$;

$y_1>y_2$.

(3)①错误.

虽然该卫生纸产量与销售量都呈直线上升的趋势,但同一年份产量大于销量且产量上升幅度明显大于销量上升幅度,不应按原计划生产,应该压缩生产或设法促销.所以②,③正确.

3. $y=-x+200$,

$120<x<200$.

4. (1)是一次函数,V 是自变量.

(2)是一次函数,m 是自变量.

5. (1) $y=3x-2$.

(2)与 x 轴交点 $\left(\frac{2}{3},0\right)$;

与 y 轴交点 $(0,-2)$;

三角形面积为 $\frac{2}{3}$.

6. 图像略.

(1) $x=6$.

(2) $x>6$.

(3) $x<6$.

* * * * * * * * * * *

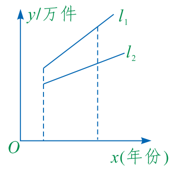
(2) 若点 $A(-5,\ y_1)$,$B(-2,\ y_2)$ 都在直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 上,则 y_1 与 y_2 的大小具有怎样的关系?

(3) 某纸业公司生产一种品牌的卫生纸,近年的产销情况如图所示.直线 l_1 和 l_2 分别表示产量与年份、销量与年份的函数关系.下列说法中哪些是正确的,哪些是错误的?试说明理由.

①该卫生纸产量与销售量均呈直线上升的趋势,应该按原计划继续生产.

②该卫生纸已经出现供大于求的趋势,价格将趋跌.

③该卫生纸库存积压越来越大,应该压缩生产或设法促销.



(第 2(3)题)

3. 某产品每件的成本是 120 元,试销阶段每件产品的售价 x(元)与日销量 y(件)之间的关系如右表.若日销量 y(件)是销售价格 x(元)的一次函数,且不允许亏本销售,求这个一次函数的表达式,并指出 x 的取值范围.

x/元	130	150	165
y/件	70	50	35

4. 已知某种物体的密度为 ρ,密度公式为 $\rho=\frac{m}{V}$(其中,m 为该物体的质量,V 为体积).

(1) 导出公式 $m=\rho V$ 是一次函数吗?若是一次函数,则哪个量是自变量?

(2) 导出公式 $V=\frac{m}{\rho}$ 是一次函数吗?若是一次函数,则哪个量是自变量?

5. 已知一次函数的图像经过点(1, 1)和(−1, −5),

(1) 求这个一次函数的表达式.

(2) 求这个一次函数的图像与 x 轴和 y 轴的交点坐标,并求出该图像与两坐标轴围成的三角形的面积.

6. 请你在同一坐标系中画出一次函数的图像

$$l_1:\ y=\frac{1}{2}x-3$$

和

$$l_2:\ y=-x+6.$$

观察图像并回答下列问题:

(1) 当 x 为何值时,l_1 与 l_2 所对应的表达式的 y 值相等?

(2) 当 x 为哪些值时,l_1 所对应的表达式的 y 值大于 l_2 所对应的表达式的 y 值?

112 | 数学 八年级下册

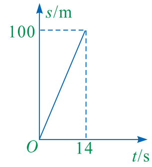
(3) 当 x 为哪些值时，l_1 所对应的表达式的 y 值小于 l_2 所对应的表达式的 y 值？

7. 在一次百米赛跑过程中，小明所跑过的路程 s(m)与所用时间 t(s)的关系如图所示.

(1) s 是 t 的什么函数？

(2) 写出 s 与 t 的函数关系式.

(3) 小明此次比赛中的速度是多少？



(第 7 题)

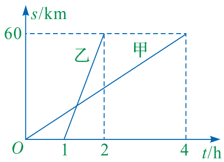
B 组

1. A，B 两地相距 60 km，甲、乙二人分别骑自行车和摩托车沿相同路线匀速行驶，由 A 地到达 B 地. 他们行驶的路程 s(km)与甲出发后的时间 t(h)之间的函数图像如图所示.

(1) 乙比甲晚出发几小时？乙比甲早到几小时？

(2) 分别写出甲、乙行驶的路程 s(km)与甲出发后的时间 t(h)的函数关系式.

(3) 乙在甲出发后几小时追上甲？追上甲的地点离 A 地有多远？



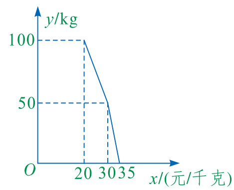
(第 1 题)

2. 某水产市场经营一种海产品，其日销售量 y(kg)与销售单价 x(元/千克)的函数关系如图所示.

(1) 分别求出当 $20\leqslant x\leqslant 30$，$30\leqslant x\leqslant 35$ 时，y 与 x 之间的函数关系式.

(2) 当单价为 32 元/千克时，日销售量是多少？

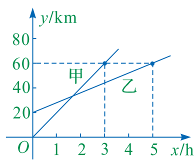
(3) 当日销售量为 80 kg 时，单价是多少？



(第 2 题)

3. A，B，C 三地位于南北方向的一条公路上（A，B，C 依次由南往北），B 与 A 相距 20 km，C 与 B 相距 40 km. 甲骑自行车，乙步行，分别由 A，B 两地同时出发，向 C 地行驶，他们离 A 地的路程 y(km)是行驶的时间 x(h)的一次函数，其图像如图所示.

(1) 出发后多长时间甲追上乙？此时离 C 地多远？



(第 3 题)

第二十一章 一次函数 | 113

7. (1) 正比例函数.

(2) $s=\dfrac{50}{7}t$.

(3) $\dfrac{50}{7}$ m/s.

B 组

1. (1) 乙比甲晚出发 1 小时，乙比甲早到 2 小时.

(2) 甲：$s=15t$，$0\leqslant t\leqslant 4$.

乙：$s=60t-60$，$1\leqslant t\leqslant 2$.

(3) 设乙在甲出发 x 小时追上甲. 据题意，得 $60(x-1)=15x$，

解得 $x=\dfrac{4}{3}$.

$15\times\dfrac{4}{3}=20$.

乙在甲出发 $\dfrac{4}{3}$ 小时时追上甲，追上甲的地点距离 A 地 20 km.

2. (1) $y=-5x+200$，$20\leqslant x\leqslant 30$，

$y=-10x+350$，$30\leqslant x\leqslant 35$.

(2) 当 $x=32$ 时，$y=-10\times 32+350=30$，日销量是 30 kg.

(3) $80=-5x+200$，$x=24$，单价是 24 元/千克.

3. (1) 甲：$y=20x$，乙：$y=8x+20$，$\begin{cases} y=20x, \\ y=8x+20, \end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{5}{3}$，$y=\dfrac{100}{3}$. $60-\dfrac{100}{3}=\dfrac{80}{3}$，

即出发后 1 小时 40 分甲追上乙，此时离 C 地 $\dfrac{80}{3}$ km.

(2) $20\times 2.5-(8\times 2.5+20)=10$，出发后 2.5 小时时甲在前面，此时他超过乙 10 km.

(2) 当出发后 2.5 h 时，谁在前面？此时他超过另一人多少千米？

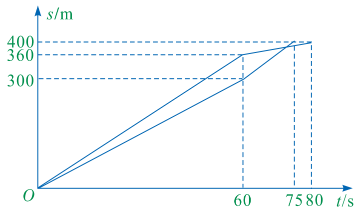
C 组

1. 有 36 名分别了多年的老同学约定到某个地方故地重游，他们决定租用汽车前往．可租用的汽车有两种：甲种每辆可以乘 8 人，乙种每辆可以乘 4 人．他们不愿意让车子留出空位，但也不能超载．(乘坐人数不包含司机)

(1) 你能想出几种租车的方案？

(2) 已知可乘 8 人的车，每天租金为 300 元；可乘 4 人的车，每天租金为 200 元．请你帮助他们选择一个最便宜的租车方案．

2. 李虹和张惠平时的耐力与速度相差无几．某日体育课上，老师设计了一个 400 m 赛跑方案，让李虹从起跑就全速前进，而让张惠留着后劲儿，待到剩下最后 100 m 时再加速，并跟踪记录了赛跑的全过程，赛跑的全过程如图所示．



(第 2 题)

(1) 你从这幅图中读出了哪些信息？

(2) 体育老师设计这个方案的目的是什么？

C 组

1. (1) 设租甲种车 x 辆，乙种车 y 辆，据题意，得

$8x+4y=36$，

变形为 $y=9-2x$，

有五组非负整数解：

$\begin{cases}x=0,\\y=9,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,\\y=7,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=5,\end{cases}$ $\begin{cases}x=3,\\y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=1.\end{cases}$

所以共有 5 种租车方案.

(2) 设租车的费用为 W 元，据题意，得

$W=300x+200y=-100x+1\,800$，

$\because -100<0$，$\therefore W$ 随着 x 的增大而减小. 当 $x=4$ 时，W 的最小值为：$-100\times4+1\,800=1\,400$(元).

所以最便宜的租车方案是租甲种车 4 辆，乙种车 1 辆.

2. (1)李虹和张惠同时出发，在前 60 秒李虹的速度为 6 m/s，张惠的速度为 5 m/s. 然后张惠的速度提高为 $\frac{20}{3}$ m/s，李虹的速度变为 2 m/s，结果张惠比李虹提前 5 s 跑完全程.

(2)老师设计两种战术，想比较那种战术成绩较好. 结果是在前 300 m 保留一定的体力，冲刺阶段加速，最后成绩好.