

第九章教学说明和建议

一、设计说明

1. 本章的内容、地位和作用.

本章介绍了三角形的有关概念,探究并证明了三角形内角和定理及其推论,分别从边和角两个方面对三角形进行了分类,较好地渗透了分类讨论的数学思想方法.同时,本章也对三角形的角平分线和中线的性质进行了适当的渗透.

三角形是最基本的几何图形之一,它既在现实生活中有着广泛地应用,同时又是几何知识体系中的基本内容,对进一步研究其他几何图形发挥着重要作用.

2. 本章内容呈现方式及特点.

(1)以现实生活中的问题和学生已有的数学经验为背景,借助学生熟悉的、具体的事物,经过观察、思考、探究、合作和交流等过程,让学生进一步体会和认识三角形.

(2)对三角形三边关系的探究,教科书采用了由特殊到一般的形式呈现,并让学生充分经历观察、实验、猜测和验证的过程,渗透对证明的理解.

(3)对三角形中各角之间关系的探究,一是突出与小学知识的衔接,借助验证“三角形的内角和等于 180° ”的方法,来“发现”证明这个结论的思路,二是突出对证明思路的探索过程,加强了对演绎推理能力的要求.

(4)教科书中对三角形的角平分线、中线和高的内容,采取了集中安排的方式,通过学生动手画图、折纸实验,发现三角形的角平分线和中线交于一点,有利于学生体会“三线”的联系与区别.

二、教学目标

1. 结合实例,理解三角形以及顶点、边、内角、外角等概念.

2. 能证明三角形的任意两边之和大于第三边,会根据三条线段的长度判断它们是否能构成三角形.

3. 通过探究活动,发现三角形内角之间以及内角与外角之间的关系,会证明三角形的内角和定理,并掌握它的推论.

4. 理解三角形的角平分线、中线和高的概念,会画出三角形的角平分线、中线和高.

三、教学建议

数学教学是数学活动的教学,是师生之间、学生之间合作交流、互动发展的过程.所以,在教学过程中,应合理地将现实性、趣味性、挑战性的问题情境提供给学生,鼓励学生大胆实验、积极操作、互相合作,引导学生展开深刻的数学思考,培养学生良好的学习品质.

1. 引导学生在独立思考和合作交流的前提下,进行“观察与思考”,从现实生活以及相关的几何图形中找到三角形,从而使能够自然地发现三角形的基本特征.

2. 教师应提供充足的时间和空间,让学生积极、深入地进行探究活动.通过自主探究、辨析研讨,更容易获得猜想和发现证明猜想的思路.例如,在探究三角形内角和定理时,应及时引导学生将“剪拼过程”转化为几何图形的表示,进而探究几何元素之间的关系,发现证明思路及多种证明方法.这样,能较好地培养学生探究的能力、有条理的思考和叙述的能力、逻辑推理的能力.

3. 重视培养学生“做中学”的方法.例如,在进行三角形的角平分线、中线和高的教学时,要让学生在动手画图的过程中,引发思考,发现性质,提升能力.

4. 在遵循课程标准的前提下,教师可创造性地使用教科书,并结合具体教学内容灵活地选取素材.

四、课时建议

9.1	三角形的边	1 课时
9.2	三角形的内角和外角	2 课时
9.3	三角形的角平分线、中线和高三 回顾与反思	1 课时 1 课时
	机 动	1 课时
	合 计	6 课时

五、评价建议

1. 注重对知识与技能的评价.应关注学生对三角形有关概念和性质的理解和运用,应以具有推理意识、掌握演绎推理的基本方法为主,不应仅仅对知识的记忆进行评价,也不应对演绎推理提出过高的要求.

2. 注重对活动过程表现的评价.学生是否在小组活动中表现出积极的态度,是否善于主动地与同学合作,是否表现出良好的与人交流的意识,是否有独到的数学思考与见解等,这些都应该引起教师的注意,应对学生各个方面积极的表现及时地给予鼓励.

3. 注重对学生反思过程的评价.反思的过程是重要的,它是学生学习进步的具体表现,教师应结合学生的学习过程,注重对学生学习过程中反思的评价,对具有自觉性和深刻性的反思应及时地给予鼓励和表扬.

4. 注重对学生情感态度的评价.在学习学习活动中,要注意培养学生自信、自强的性格,记录学生在学习过程中的情感表现以及在解决问题过程中所表现出来的创新精神.

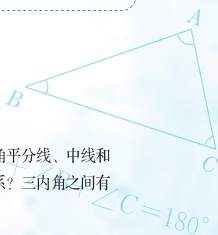
第九章

三 角 形

在本章中，我们将学习

- 三角形的边
- 三角形的角
- 三角形的有关线段

- 三 角形有三条边、三个内角，还有角平分线、中线和
- 三 高。三角形的三边之间有什么关系？三内角之间有什么关系？



章题页展示出了本章将要学习的内容，并以实物图片的形式，突出呈现三角形在现实生活中的应用，形象直观，主题鲜明。

三角形三边之间的关系，可让学生根据“两点之间，线段最短”的事实进行描述；三个内角之间的关系，可根据小学里的认知进行说明。

怎么证明这些结论呢？

这些将在课文里详细地说明，以此激发学生的探究欲望和学习兴趣。

教学目标

1. 结合实例,理解三角形以及顶点、边和内角的概念.

2. 理解“三角形中,任意两边之和大于第三边”的证明,掌握它并会应用.

观察与思考

通过对实物图片的观察,体会三角形的广泛应用性;经历对三条线段不同摆放位置的思考,发现三角形的构成特点.

一起探究

让学生充分经历操作、探究、猜想和证明的完整过程.

1. 不能,能.
2. 三角形的两边之和大于第三边.
3. 略.

9.1 三角形的边

三角形是由三条线段构成的,但任意三条线段未必能构成三角形.那么,能组成三角形的三条线段具有什么关系呢?



观察与思考

1. 指出下列图片中的三角形.



2. 如图 9-1-1,是怎样用线段 a, b, c 构成三角形的?

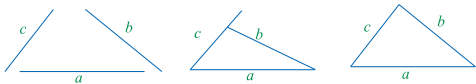


图 9-1-1

由不在同一直线上的三条线段首尾顺次相接所构成的图形叫做**三角形**(triangle).

如图 9-1-2, 线段 AB, BC, AC 叫做三角形的边; 点 A, B, C 叫做三角形的顶点; $\angle A, \angle B, \angle C$ 叫做三角形的内角(简称三角形的角). 以点 A, B, C 为顶点的三角形记为 $\triangle ABC$, 读作“三角形 ABC ”.

三角形的边有时也用小写字母来表示. 一般地, $\triangle ABC$ 的顶点 A, B, C 的对边分别用 a, b, c 表示.

同一条直线上首尾相接的三条线段能组成三角形吗?

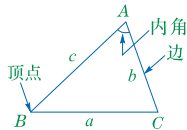


图 9-1-2



一起探究

1. 用长是 2 cm, 3 cm, 5 cm 的线段能组成三角形吗? 用长是 2 cm,

教学建议

在教师的引导下,通过学生的观察与思考,感悟和认识到三角形的本质特征.通过学生自主探究、学生互动及师生互动等活动,完成对三角形三边关系的猜想与证明.

1. 引导学生在独立思考和合作交流的前提下,进行“观察与思考”,使学生从实物图片中找到三角形,从三条线段的不同摆放位置,发现三角形的基本特征,进而形成三角形的概念.

2. 对于“一起探究”,可以按照提出的探究性问题,通过学生的实际操作,先获得猜想,再完成证明.使学生能够体会到:特殊到一般、具体到抽象、猜想到证明等解决问题的全过程.这个过程应以学生活动为主,教师进行必要的点拨和引导.

3. 通过“大家谈谈”,加深学生对三角形三边关系的理解和应用.教师可以再为学生提供一些相关的题目,师生一起探究解决.

3 cm, 4 cm 的线段呢?

2. 三角形的两边之和与第三边有怎样的大小关系?
3. 请将你的猜想写成命题的形式并对猜想说理.

事实上, 如图 9-1-3, 已知 $\triangle ABC$, 对 $AC+BC>AB$, $AB+AC>BC$, $AB+BC>AC$ 说理过程如下:

- $\because AB$ 是线段,
- $\therefore AC+BC>AB$ (两点之间线段最短).

同理, 可得

$$AB+AC>BC, AB+BC>AC.$$

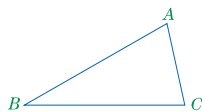


图 9-1-3

三角形任意两边的和大于第三边.

大家谈谈

已知一个三角形的最小边为 2 cm, 另两边分别为 6 cm 和 a cm. a 的取值范围是什么?

如图 9-1-4. 我们把两条边相等的三角形叫做**等腰三角形**(isosceles triangle), 相等的两边叫做**腰**; 把三边相等的三角形叫做**等边三角形**; 把三边互不相等的三角形叫做**不等边三角形**. 等边三角形是特殊的等腰三角形.

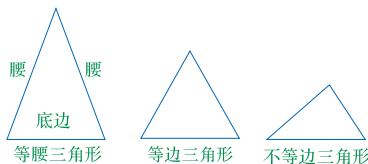
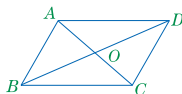


图 9-1-4

练习

1. 请举出现实生活中有关三角形的实例.
2. 请找出图中所有的三角形, 并把它们写出来.
3. 已知长度分别为 3 cm 和 5 cm 的两条线段.

在长度为



(第 2 题)

大家谈谈

a 的取值范围:

$$4 < a < 8.$$

注:《标准(2011 年版)》对“三角形任意两边之差小于第三边”不作要求, 况且此时学生还没有学习不等式及其解法, 所以, 这里应以“试值”的办法得出“ $4 < a$ ”.

练习

1. 略.
2. 共有 8 个三角形, 分别是 $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle AOD$, $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$.

3. 3, 4, 5, 6, 7 (cm) 都可以和已知的两条线段构成三角形, 而 1, 2, 8, 9 (cm) 则不能.

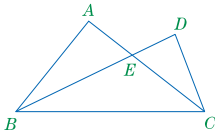
习题

- 一共有 5 个三角形, 分别是 $\triangle ABE$, $\triangle BCE$, $\triangle CDE$, $\triangle ABC$, $\triangle BCD$. 边和角略.
- (1) 和 (3) 中的线段能构成三角形.
- 三角形的三边长分别为 2, 5, 5 或 3, 4, 5.
- 三角形的三边长分别为 1, 7, 7; 3, 6, 6; 5, 5, 5; 7, 4, 4.

1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm 的线段中, 哪些线段能和已知的两条线段构成三角形, 哪些线段不能和已知的两条线段构成三角形?

习题

- 找出图中的三角形, 并分别写出这些三角形的边和角.
- 三条线段的长度如下:
 - 1.5 cm, 2 cm, 2.5 cm;
 - 1 cm, 2 cm, 3 cm;
 - 1 cm, 4 cm, 4 cm.
 哪一组线段能构成三角形?
- 已知一个三角形一边的长是 5, 另两边的长是整数, 且周长为 12. 求这个三角形的三边长.
- 一个等腰三角形的三边长都是整数, 且周长为 15. 求这个三角形的三边长.



(第 1 题)

9.2 三角形的内角和与外角

在小学,我们已经知道三角形的三个内角之和是 180° . 怎样说理呢?

观察与思考

1. 如图 9-2-1, 在小学, 我们通过剪拼发现了三角形的三个内角和等于 180° . 从这种剪拼过程中, 你能得到什么启示? 其中哪两条直线是平行的?

2. 如图 9-2-2, 已知 $\triangle ABC$. 延长 BC 到点 D , 过点 C 作直线 $CE \parallel AB$, 得到 $\angle 4$ 和 $\angle 5$. $\angle 4$ 和 $\angle 5$ 与三角形的内角有什么关系?



图 9-2-1

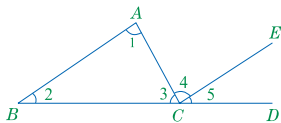


图 9-2-2

把上述两图结合起来看, 剪拼的过程相当于把 $\angle 2$ 沿 BC 方向平移到 $\angle 5$ 的位置, 从而有 $AB \parallel CE$. 由此我们得到启发: 如果延长 BC 到点 D , 过点 C 作直线 $CE \parallel AB$, 那么 $\angle 2$ 与 $\angle 5$ 是同位角, $\angle 1$ 与 $\angle 4$ 是内错角. 利用平行线的性质定理以及等量代换, 就把三角形三个内角 $\angle 1$, $\angle 2$ 与 $\angle 3$ 的和转化成了 $\angle 3$, $\angle 4$ 与 $\angle 5$ 的和, 而这三个角恰好构成一个平角.

事实上, 如图 9-2-3, 已知 $\triangle ABC$. 对 $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$ 的说理过程如下^[1]:

延长 BC 到点 D , 作 $CE \parallel AB$.

$\because CE \parallel AB$,

$\therefore \angle 1 = \angle 4$ (两直线平行, 内错角相等),

$\angle 2 = \angle 5$ (两直线平行, 同位角相等).

$\therefore \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ (平角的定义),

$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (等量代换),

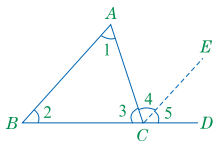


图 9-2-3

教学目标

1. 理解三角形内角和定理的证明, 掌握三角形内角和定理及其推论, 并会用它们进行有关计算.

2. 知道三角形的外角, 经历三角形内角与外角之间关系的探究过程, 了解三角形内角与外角的关系.

3. 能够按边和角对三角形进行分类.

观察与思考

从实物图片抽象出几何图形, 并从将角平移的过程中, 发现两条线之间的平行关系, 从而形成证明三角形内角和定理的思路.

[1] 这里的说理过程, 实际上给出了“三角形内角和定理”演绎推理的证明格式.

教学建议

本节教学内容, 应在教师引导下, 以学生活动为主, 通过学生的主动探究, 促进学生观察、发现和说理能力的提升.

1. 根据学生实际情况, 采取不同方式, 让学生深入思考剪拼三角形纸片的过程, 验证三角形内角和定理的发现过程, 为探究证明定理的思路奠定基础.

2. 关于三角形内角和定理的证明, 可先让学生尝试完成, 教师针对学生说理过程中出现的问题, 有针对性地进行点拨、引导, 最后规范学生的书写格式.

3. 结合“试着做做”中的问题, 教师可以根据学生的实际情况, 让学生尝试作不同的辅助线, 让学生的思维充分展开, 使学生在探究证明方法的过程中提高推理能力.

试着做做

引发学生进行深入思考,培养学生发散思维能力,突出对证明方法的拓展与提升.

[2]例 1 可先让学生尝试解决,教师再规范书写格式.

练习

- $\angle A = 88^{\circ}44'$.
- $\angle A = 48^{\circ}, \angle B = 96^{\circ}$.
- $\angle B = 69^{\circ}$.

即 $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^{\circ}$.

三角形内角和定理

三角形的内角和等于 180° .

在上面的推理过程中,关键是作一条与三角形某一边平行的辅助线.



试着做做

请根据图 9-2-4 给出的图示(过点 C 作 $ED \parallel AB$),对“三角形内角和等于 180° ”说理.

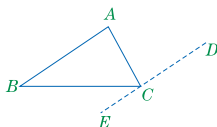


图 9-2-4

还有其他说理的方法吗?

作平行线是把角从一个位置“转移”到另一个位置的重要手段.

例 1^[2] 如图 9-2-5,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 30^{\circ}$, $\angle B = 65^{\circ}$, 求 $\angle C$ 的度数.

解: $\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^{\circ}$ (三角形内角和定理),

$$\therefore \angle C = 180^{\circ} - (\angle A + \angle B).$$

$$\because \angle A = 30^{\circ}, \angle B = 65^{\circ}, \text{ (已知)}$$

$$\therefore \angle C = 180^{\circ} - (30^{\circ} + 65^{\circ}) = 85^{\circ}.$$

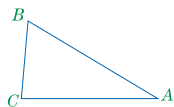


图 9-2-5



练习

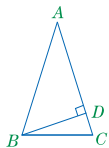
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 62^{\circ}24'$, $\angle C = 28^{\circ}52'$, 求 $\angle A$ 的度数.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 36^{\circ}$, $\angle A$ 与 $\angle B$ 的比是 $1:2$, 求 $\angle A$, $\angle B$ 的度数.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 42^{\circ}$, $\angle A = \angle B$, 求 $\angle B$ 的度数.

A 组

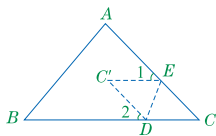
- 在 $\triangle ABC$ 中:
 - 若 $\angle C=90^\circ$, $\angle A=25^\circ$, 求 $\angle B$ 的度数.
 - 若 $\angle C=37^\circ 26'$, $\angle A=\angle B$, 求 $\angle A$ 的度数.
 - 若 $\angle A=\frac{1}{2}\angle B=\frac{1}{3}\angle C$, 求 $\angle C$ 的度数.
- 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A-\angle C=35^\circ$, $\angle B-\angle A=5^\circ$, 求 $\triangle ABC$ 各内角的度数.
- 求适合下列条件的 $\triangle ABC$ 的各内角的度数:
 - $\angle A=\angle B=30^\circ$;
 - $\angle A=\angle B=\angle C$;
 - $\angle A=50^\circ$, $\angle A+\angle B=\angle C$.
- 一个三角形三个内角的度数之比为 $2:3:7$, 求这个三角形的三个内角的度数.

B 组

- 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=\angle ABC=2\angle A$, $\angle ADB=90^\circ$. 求 $\angle DBC$ 的度数.



(第1题)



(第2题)

- 如图, $\triangle ABC$ 是一张纸片, 把 $\angle C$ 沿 DE 折叠, 点 C 落在点 C' 的位置, 当 $\angle C=45^\circ$ 时, 求 $\angle 1+\angle 2$ 的度数.

习 题

A 组

- $\angle B=65^\circ$.
 - $\angle A=71^\circ 17'$.
 - $\angle C=90^\circ$.
- $\because \angle B-\angle A=5^\circ$,
 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$,
 $\therefore 2\angle A+\angle C=175^\circ$.
 $\because \angle A-\angle C=35^\circ$,
 $\therefore 3\angle A=210^\circ$.
 $\therefore \angle A=70^\circ$.
 $\therefore \angle B=75^\circ, \angle C=35^\circ$.
- $\angle C=120^\circ$;
 - $\angle A=\angle B=\angle C=60^\circ$;
 - $\angle B=40^\circ, \angle C=90^\circ$.

- 设这个三角形的三个内角分别为 $2\alpha, 3\alpha, 7\alpha$, 根据三角形内角和定理, 得
 $2\alpha+3\alpha+7\alpha=180^\circ$.
 解得 $\alpha=15^\circ$.
 $\therefore 2\alpha=30^\circ, 3\alpha=45^\circ$,
 $7\alpha=105^\circ$.

B 组

- $\because \angle A+\angle ABC+\angle C=180^\circ, \angle C=\angle ABC=2\angle A$,
 $\therefore 5\angle A=180^\circ, \angle A=36^\circ$.

$$\begin{aligned} \therefore \angle C &= 72^\circ. \quad \because \angle ADB = 90^\circ, \quad \therefore \angle BDC = 90^\circ. \\ \therefore \angle DBC &= 180^\circ - \angle BDC - \angle C = 180^\circ - 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ. \end{aligned}$$

- 在 $\triangle CDE$ 中, $\because \angle CED+\angle CDE+\angle C=180^\circ, \angle C=45^\circ$,
 $\therefore \angle CED+\angle CDE=135^\circ$.
 $\because \angle C'ED=\angle CED, \angle C'DE=\angle CDE$, $\therefore \angle C'ED+\angle C'DE=135^\circ$.
 $\because \angle 1+\angle CED+\angle C'ED=180^\circ, \angle 2+\angle CDE+\angle C'DE=180^\circ$,
 $\therefore \angle 1+\angle CED+\angle C'ED+\angle 2+\angle CDE+\angle C'DE=360^\circ$.
 $\therefore \angle 1+\angle 2=360^\circ-270^\circ=90^\circ$.

大家谈谈

让学生先独立思考，并尝试对猜想的结论进行证明，最后再合作交流。

1. $\angle ACD + \angle ACB = 180^\circ$, $\angle ACD = \angle A + \angle B$.
2. $\angle ACD > \angle A$, $\angle ACD > \angle B$.
3. 略.

三角形的一边与另一边的延长线组成的角，叫做三角形的**外角** (exterior angle).

如图 9-2-6, $\angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角.

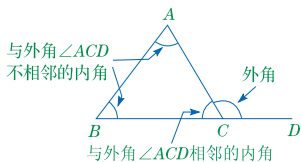


图 9-2-6



大家谈谈

1. 如图 9-2-6, $\angle ACD$ 与 $\angle ACB$ 有什么关系? $\angle ACD$ 与 $\angle A + \angle B$ 有什么关系?
2. 如图 9-2-6, $\angle ACD$ 与 $\angle A$ (或 $\angle B$) 的大小有什么关系?
3. 对你的猜想说理.

三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角之和.

三角形的一个外角大于与它不相邻的任意一个内角.

例 2 如图 9-2-7, $\angle BCD = 92^\circ$, $\angle A = 27^\circ$, $\angle BED = 44^\circ$. 求:

- (1) $\angle B$ 的度数.
- (2) $\angle BFD$ 的度数.

解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中,

$$\begin{aligned} \because \angle BCD &= \angle A + \angle B \quad (\text{三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和}), \\ \angle BCD &= 92^\circ, \angle A = 27^\circ, \quad (\text{已知}) \\ \therefore \angle B &= \angle BCD - \angle A = 92^\circ - 27^\circ = 65^\circ. \end{aligned}$$

(2) 在 $\triangle BEF$ 中,

$$\begin{aligned} \because \angle BFD &= \angle B + \angle BED \quad (\text{三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和}), \\ \angle BED &= 44^\circ \quad (\text{已知}), \\ \angle B &= 65^\circ \quad (\text{已求}), \\ \therefore \angle BFD &= 44^\circ + 65^\circ = 109^\circ. \end{aligned}$$

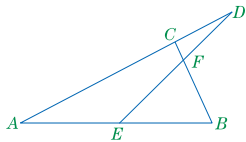


图 9-2-7

还有其他解法吗? 试试看.

教学建议

1. 三角形的外角是与其内角相对产生的概念, 每一个内角都有两个外角, 且这两个外角是对顶角, 所以两外角相等. 因此, 提及三角形的外角时, 一般只关注三个外角. 教学中, 应注意这一点.

2. 三角形内角和定理的推论是定理的直接延伸. 因此, 在教学时, 应做到:

在回顾三角形内角和定理的基础上, 结合“大家谈谈”中的问题, 引导学生发现三角形内角和外角之间的关系, 并尝试说理, 实现从直观感知到数学思考的转化.

3. 对于三角形内角和定理的推论, 应通过例题体现其在有关几何问题中的灵活应用, 最好以学生独立思考、辨析研讨的形式完成例题的解答过程.

1. 一个三角形的内角最多有几个直角, 最多有几个钝角?
2. 一个三角形能不能三个内角都是锐角?

一个三角形最多有一个内角是直角. 因为假设它有两个内角是直角, 那么这个三角形的内角和就大于 180° 了, 这与三角形的内角和等于 180° 矛盾, 所以一个三角形最多有一个内角是直角.^[3] 同样, 一个三角形最多有一个内角是钝角. 一个三角形的三个内角有可能都是锐角.

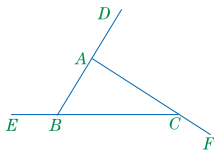
我们把三个内角都是锐角的三角形叫做**锐角三角形**(acute triangle), 有一个内角是直角的三角形叫做**直角三角形**(right triangle), 有一个内角是钝角的三角形叫做**钝角三角形**(obtuse triangle).

1. 对三角形, 按是否有相等的边可分为两类. 对有相等边的情况, 又可分为只有两边相等的和三边相等的两类. 请你按边对三角形进行分类.
2. 请你试着按角对三角形进行分类.

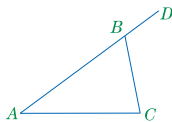
1. 如图, 点 D 在 $\triangle ABC$ 的边 AB 的延长线上, $\angle DBC = 112^\circ$, $\angle A = 35^\circ$. 求 $\angle C$.

2. 已知某三角形的一个外角是 55° , 这个三角形是锐角三角形、直角三角形, 还是钝角三角形?

3. 如图, $\angle DAC$, $\angle EBA$, $\angle FCB$ 分别是 $\triangle ABC$ 的三个外角, 求 $\angle DAC + \angle EBA + \angle FCB$ 的度数.



(第3题)

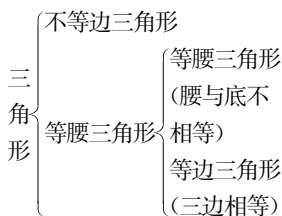


(第1题)

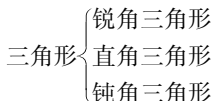
将学生的直观认识转化为理性思考, 并初步渗透反证法的思想.

[3] 这里应用了反证法, 目的是先渗透, 初步了解一下, 后面再详细说明.

1. 三角形按边分类如下:



2. 三角形按角分类如下:



1. $\angle C = 77^\circ$.
2. 这个三角形是钝角三角形.
3. 360° .

4. “大家谈谈”的内容, 为将三角形按角分类做好了铺垫. 教学时, 不仅要让学生回答结论, 更要说明理由, 并对每个学生的回答进行辨析研讨, 教师参与其中, 并渗透反证法, 使大家在活动中明白道理.

5. 按边或角对三角形进行分类, 是渗透分类思想的较好素材, 要在教师引导下, 通过学生的辨析、研讨, 初步了解分类的一般方法.

A 组

1. $\angle ADB = 85.5^\circ$,
 $\angle ADC = 94.5^\circ$.
2. 三个内角分别为: 36° ,
 $72^\circ, 72^\circ$.
3. 理由:
 $\because \angle EAD = \angle CAD$,
 $\therefore \angle EAC = 2\angle EAD$.
 $\because \angle EAC$ 是 $\triangle ABC$ 的外角,
 $\therefore \angle EAC = \angle B + \angle C$.
 $\because \angle B = \angle C$,
 $\therefore \angle EAC = 2\angle B$.
 $\therefore \angle EAD = \angle B$.
 $\therefore AD \parallel BC$.

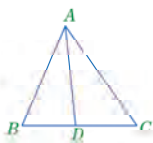
B 组

1. 把一个三角形折一次能分成两个直角三角形,但不能分成两个锐角三角形.理由如下:如图所示,因为与三角形一边相交的折痕将原来的三角形纸片分成两部分,构成了两个三角形.我们考查 $\angle 1$ 和 $\angle 2$. 因为 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, 所以若其中一个为直角,则另一个也是直角,因此可

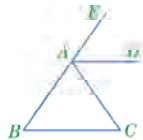


A 组

1. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAD = \angle CAD$, $\angle B = 64^\circ$, $\angle C = 55^\circ$, 请各用两种方法求 $\angle ADB$ 和 $\angle ADC$ 的度数.
2. 三角形的一个外角等于与它相邻的内角的 4 倍,又等于与它不相邻的一个内角的 2 倍,求这个三角形各内角的度数.
3. 已知:如图,点 E 在 BA 的延长线上, $\angle EAD = \angle CAD$, $\angle B = \angle C$, 对 $AD \parallel BC$ 进行说理.



(第1题)



(第3题)

B 组

1. 小熊和小猫想把一个三角形纸片折一次后,折痕把原三角形分成两个直角三角形,能做到吗?如果使折痕把原三角形分成两个锐角三角形呢?如果能,说明折的方法;如果不能,说明理由.

怎么折呢?



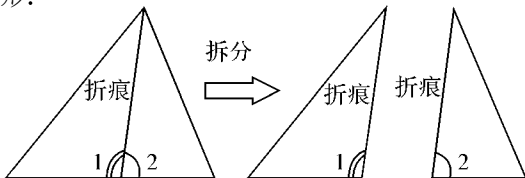
(第1题)



(第2题)

2. 如图, $\angle 1$ 是哪个三角形的外角? $\angle 2$ 是哪个三角形的外角? 利用三角形的外角与内角的关系,求 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ 的度数.

以分成两个直角三角形;若其中一个为锐角(比如是 $\angle 2$),那么另一个一定是钝角,所以不能分成两个锐角三角形.



2. $\angle 1$ 是 $\triangle CEF$ 的外角, $\angle 2$ 是 $\triangle BDL$ 的外角.

$$\therefore \angle 1 = \angle C + \angle E, \angle 2 = \angle B + \angle D.$$

在 $\triangle AFL$ 中,根据三角形内角和定理,得 $\angle A + \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.

$$\therefore \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ.$$

9.3 三角形的角平分线、中线和高三

三角形的角平分线、中线和高的与三角形有关的重要线段，认识这些线段对于进一步研究三角形有着重要的作用。



试着做做

如图 9-3-1，已知 $\triangle ABC$ 。

- (1) 画出 $\angle A$ 的平分线。
- (2) 画出边 BC 的中点，并与点 A 连接。
- (3) 过点 A 画出 BC 所在直线的垂线。

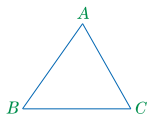


图 9-3-1

三角形一个内角的平分线与它的对边相交，这个角的顶点与交点间的线段叫做**三角形的角平分线**(angular bisector of a triangle)。

如图 9-3-2，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAD = \angle CAD$ ，线段 AD 是 $\triangle ABC$ 的一条角平分线。

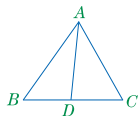


图 9-3-2

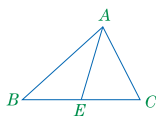


图 9-3-3

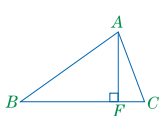


图 9-3-4

连接三角形的一个顶点与它对边中点的线段叫做**三角形的中线**(median of a triangle)。

如图 9-3-3，在 $\triangle ABC$ 中，点 E 在 BC 上， $BE = EC$ ，线段 AE 是 $\triangle ABC$ 的一条中线。

三角形的一个顶点到它对边所在直线的垂线段叫做**三角形的高**(height of a triangle)，简称**三角形的高**。

如图 9-3-4，在 $\triangle ABC$ 中， $AF \perp BC$ 于点 F ，线段 AF 是 $\triangle ABC$ 的一条高。

教学目标

1. 理解三角形的角平分线、中线和高的概念，会画出已知三角形的角平分线、中线和高的。
2. 了解三角形的重心。

试着做做

让学生经历画“三线”的过程，加深对“三线”概念的理解，体会“三线”之间的联系与区别。

教学建议

动手操作、实验探究是学生获得直接经验的重要途径之一。本节课要以学生画图、操作、实验和探究为主线，以恰当的问题情境为平台，将学生的直观经验转化为数学思考，实现学生对概念的理解。

1. 通过“试着做做”，让学生运用已有的画图知识，经历画三角形的角平分线、中线和高的过程，深刻体会“三线”的本质属性。

2. 结合学生画出的图形，教师可以给出“三线”的定义，并和学生一起辨析研讨“三线”之间的联系和区别，加深学生对概念的理解。

3. “做一做”栏目，仍然应以学生的活动为主，教师应关注学生画图、操作和实验过程中所出现的问题以及活动的结果，应以合作交流的形式解决和研讨，确保学生的活动质量和效果。

做一做

在巩固学生对“三线”概念理解的同时,渗透“三线”性质.教材中,仅提出了“重心”的概念,“内心”蕴含在学生作图之中,而“垂心”不作要求.在教学时,教师应正确把握内容,不宜提出过高的要求.



做一做

1. 一个三角形有几条角平分线?画一个三角形,用量角器和直尺画出它的所有角平分线.

2. 如图 9-3-5,已知 $\triangle ABC$,请你分别画出 BC 边上的高.

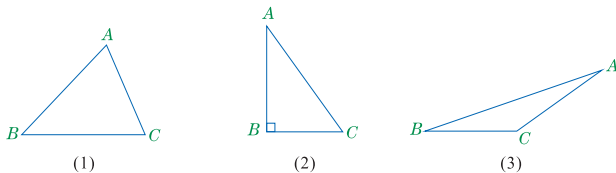


图 9-3-5

3. 剪下一个三角形纸片,用折纸的方法找到三边的中点,画出这个三角形的三条中线.这三条中线交于一点吗?

4. 按照你剪下的三角形纸片,用厚薄均匀的硬纸板裁出一个三角形,画出这个三角形的三条中线,在它们的交点处钻一个小孔,通过小孔系一条线将三角形硬纸板吊起,三角形硬纸板处于什么状态?这种现象说明了什么?

纸板处于平衡状态,换一点就不平衡了.

实际上,三角形的三条中线交于一点,这个交点叫做这个三角形的重心.



练习

1. 相等的角有:

$$\angle BAE = \angle CAE,$$

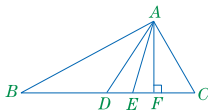
$$\angle AFB = \angle AFC;$$

相等的线段有:

$$BD = CD.$$

2. 略.

1. 如图, AD , AE , AF 分别是 $\triangle ABC$ 的中线、角平分线和高. 请你指出图中相等的角及相等的线段.



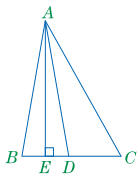
(第 1 题)

2. 分别画出锐角三角形、直角三角形和钝角三角形的三条角平分线、三条中线和三条高.

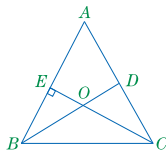
习题

A 组

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是角平分线, AE 是高, $\angle BAC=40^\circ$, $\angle C=60^\circ$. 求 $\angle DAE$ 的度数.



(第1题)

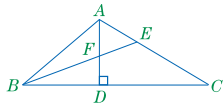


(第2题)

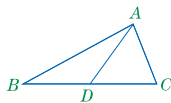
2. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=62^\circ$, BD 是角平分线, CE 是高, BD 与 CE 交于点 O . 求 $\angle BOC$ 的度数.

B 组

1. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是高, BE 是角平分线, AD , BE 交于点 F , $\angle C=30^\circ$, $\angle BFD=70^\circ$. 求 $\angle BAC$ 的度数.



(第1题)



(第2题)

2. (1) 如图, $\triangle ABC$ 的面积等于10, AD 是中线, 分别求出 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的面积.
(2) 你能把一个三角形分成面积相等的两部分吗? 分成面积相等的四部分呢? 分成面积相等的三部分呢?

习题

A 组

1. $\because AD$ 是角平分线,
 $\angle BAC=40^\circ$,
 $\therefore \angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC$
 $=\frac{1}{2}\times 40^\circ=20^\circ$.
 $\therefore \angle ADE=\angle CAD+\angle C=20^\circ+60^\circ=80^\circ$.
 $\because AE$ 是高,
 $\therefore \angle AED=90^\circ$,
 $\therefore \angle DAE=180^\circ-\angle AED-\angle ADE=180^\circ-90^\circ-80^\circ=10^\circ$.
2. $\because BD$ 是角平分线,
 $\angle ABC=62^\circ$,
 $\therefore \angle ABD=\frac{1}{2}\angle ABC$
 $=\frac{1}{2}\times 62^\circ=31^\circ$.
 $\because CE$ 是高,
 $\therefore \angle BEC=90^\circ$.
 $\because \angle BOC$ 是 $\triangle BOE$ 的外角,
 $\therefore \angle BOC=\angle ABD+\angle BEC=31^\circ+90^\circ=121^\circ$.

B 组

1. $\because AD$ 是高, $\angle BFD=70^\circ$, $\therefore \angle DBF=180^\circ-\angle BDF-\angle BFD=180^\circ-90^\circ-70^\circ=20^\circ$.
 $\because BE$ 是角平分线, $\therefore \angle ABC=2\angle DBF=2\times 20^\circ=40^\circ$.
 $\because \angle C=30^\circ$, $\therefore \angle BAC=180^\circ-\angle ABC-\angle C=180^\circ-40^\circ-30^\circ=110^\circ$.
2. (1) $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 10=5$.
 (2) 画三角形的一条中线将三角形分成面积相等的两个三角形, 每个三角形的一条中线又将它们分别分成面积相等的两个三角形, 这样就将原三角形分成了面积相等的四部分. 把三角形一边三等分, 分别连接这边所对顶点与三等分点, 就将原三角形分成了面积相等的三部分.

教学目标

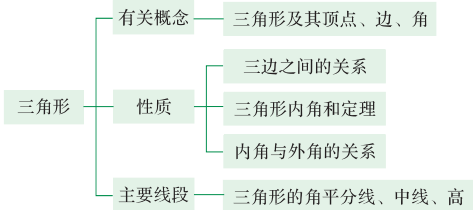
1. 梳理、归纳本章知识,加深对三角形有关概念和性质的认识和理解.

2. 能熟练运用三角形内角和定理及其推论进行有关计算,体会逻辑推理的格式和作用,提高综合运用知识解决问题的能力.

3. 通过对本章教学内容的反思,感受分类思想方法,积累数学活动经验,发展学生的归纳概括能力.

回顾与反思

一、知识结构



二、总结与反思

三角形是一种常见的基本图形,它的内容丰富,应用广泛.三角形的性质及研究方法是学习其他几何知识的基础.

1. 三角形边和角的性质.

(1) 三角形三边之间的关系: _____.

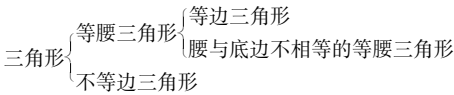
(2) 三角形三个内角之间的关系: _____.

(3) 三角形一个外角和与它不相邻的两个内角之间的关系: _____.

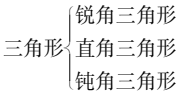
2. 三角形的分类.

在对某一对象进行分类时,要先确定分类的标准,然后再按标准进行分类.分类时要做到不重不漏.

三角形按边可分类如下:



三角形按角可分类如下:



3. 添加辅助线.

在解决几何问题时,有时需要在图形上添加辅助线.

我们在对“三角形的内角和等于 180° ”进行说理时,是怎样添加辅助线的?添加这条辅助线的目的或作用是什么?

教学建议

通过对本章知识内容的回顾与总结,梳理知识脉络,建立知识之间的联系,形成属于学生自己的知识网络和结构.

1. 在教师的引导下,由学生自己来探究知识之间的联系,绘制知识结构图表.在此过程中,应鼓励学生积极思考,并进行合作交流,通过学生互动、师生互动,共同完成对本章知识的归纳与总结.

2. 教师应将总结与反思的过程转换成一系列相应的问题,让学生在对问题的反思、交流、合作、探究等活动中体会知识之间的联系.

3. 在“回顾与反思”整个教学过程中,教师应审时度势地进行点拨和引导.

A 组

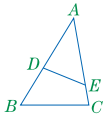
1. 填空:

如果一个三角形的三个内角度数之比为 $1:3:5$, 那么最大角的度数是 _____.

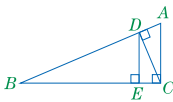
2. 三角形的两条边长分别为 6 cm 和 10 cm, 写出这个三角形周长的取值范围.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle A$ 比 $\angle C$ 大 10° , $\angle B$ 比 $2\angle C$ 小 10° . 求这个三角形各角的度数.

4. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在 AB 上, 点 E 在 AC 上, $\angle ADE = \angle C$. 对 $\angle B = \angle AED$ 进行说理.



(第 4 题)

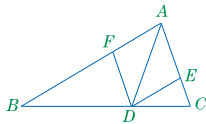


(第 5 题)

5. 如图, $\angle ACB = 90^\circ$, CD 是 $\triangle ABC$ 的高, DE 是 $\triangle BDC$ 的高, $\angle A = 3\angle CDE$. 求 $\angle B$ 的度数.

6. $\triangle ABC$ 的一个内角为 40° , $\angle A = \angle B$. 你能说出 $\triangle ABC$ 的外角分别是多少度吗?

7. 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $DE \parallel AB$, $DF \parallel AC$. 对 $\angle ADE = \angle ADF$ 进行说理.

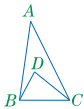


(第 7 题)

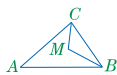
B 组

1. 三角形的三条边长都是整数, 周长为 11, 且有一边长为 4. 这个三角形可能的最大边长是多少? 请说明理由.

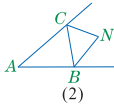
2. 如图, D 为 $\triangle ABC$ 内部一点, $\angle ABD = 20^\circ$, $\angle ACD = 25^\circ$, $\angle A = 35^\circ$. 求 $\angle BDC$ 的度数.



(第 2 题)



(1)



(2)

(第 3 题)

复习题

A 组

1. 100° .

2. 大于 20 cm 且小于 32 cm.

3. $\angle A = 55^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 45^\circ$.

4. 说理如下:

根据三角形内角和定理, 得

$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C.$$

$$\text{同理, } \angle AED = 180^\circ - \angle A - \angle ADE.$$

$$\because \angle ADE = \angle C.$$

$$\therefore \angle B = \angle AED.$$

5. 22.5° .

6. 外角分别是 80° , 140° , 140° 或 140° , 110° , 110° .

7. 说理如下:

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$$\therefore \angle DAF = \angle DAE.$$

$$\because DE \parallel AB,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle DAF.$$

$$\because DF \parallel AC,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle DAE.$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ADF.$$

B 组

1. 这个三角形可能的最大边长为 5. 理由: 由已知条件可知, 另两条边长的和为 7, 所以这两条边长的可能取值为: 6 和 1; 5 和 2; 4 和 3.

(1) $\because 1+4 < 6$, $\therefore$ 以 1, 4, 6 为边不能构成三角形.

(2) 以 2, 4, 5 和 3, 4, 4 为边, 都能构成三角形.

所以这个三角形可能的最大边长为 5.

2. $\angle BDC = 80^\circ$.

提示: 延长 BD 交 AC 于点 E ,

$$\angle BDC = \angle BEC + \angle ACD = \angle A + \angle ABD + \angle ACD = 35^\circ + 20^\circ + 25^\circ = 80^\circ.$$

3. (1) $\angle BMC = 110^\circ$.

(2) $\angle BNC = 70^\circ$.

4. 理由如下:

如图, 延长 BD , 交 AC 于点 E .

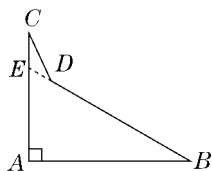
$\because \angle A = 90^\circ, \angle B = 30^\circ,$

$\therefore \angle CED = 120^\circ.$

又 $\because \angle C = 25^\circ,$

$\therefore \angle BDC = 145^\circ.$

所以, 当 $\angle BDC = 142^\circ$ 时, 可以断定这个零件不合格.



C 组

1. (1) $180^\circ, 180^\circ, 360^\circ$.

(2) 540° .

2. (1) ①3; ②6; ③10.

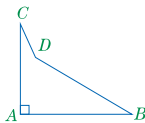
(2) $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$.

3. 已知在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 40^\circ$.

(1) 如图 (1), 角平分线 BM 和 CM 交于点 M , 求 $\angle BMC$ 的度数.

(2) 如图 (2), 外角平分线 BN 和 CN 交于点 N , 求 $\angle BNC$ 的度数.

4. 某车间加工的零件如图所示, 要求 $\angle A = 90^\circ, \angle B = 30^\circ, \angle C = 25^\circ$. 质检人员只量得 $\angle BDC = 142^\circ$, 就断定这个零件不合格. 请说明理由.

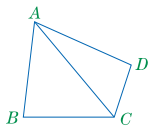


(第 4 题)

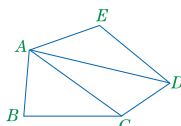
C 组

1. (1) 如图 (1), $\angle BAC + \angle B + \angle BCA$ 等于多少度? $\angle DAC + \angle D + \angle DCA$ 等于多少度? $\angle DAB + \angle B + \angle BCD + \angle D$ 等于多少度?

(2) 如图 (2), 仿照 (1) 题, 求 $\angle EAB + \angle B + \angle BCD + \angle CDE + \angle E$ 的度数.



(1)

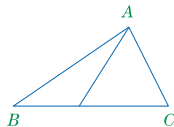


(2)

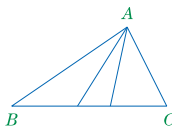
(第 1 题)

2. 找规律, 填空:

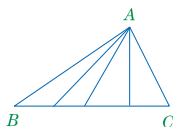
(1) 请你按下列要求数出三角形的个数.



(1)



(2)



(3)

(第 2 题)

① BC 边上有 1 个点 (图 (1)), 三角形的个数为 _____.

② BC 边上有 2 个点 (图 (2)), 三角形的个数为 _____.

③ BC 边上有 3 个点 (图 (3)), 三角形的个数为 _____.

(2) 当 BC 边上有 m 个点 (不含 B, C 两点) 时, 图形中三角形的个数为 _____.

第十章教学说明和建议

一、设计说明

1. 本章的内容、地位和作用.

本章内容包括:不等式的概念及其性质,一元一次不等式和一元一次不等式组的概念及其解法,一元一次不等式的简单应用.

现实世界中,同类量之间的不相等关系比相等关系更为普遍,刻画这种不相等关系的的就是不等式,因此,不等式是一种重要的数学模型,它是解决有关实际问题的重要工具.不等式是学生学习了一元一次方程和二元一次方程组之后,所要经历的又一次数学建模过程,是现阶段所要学习的重要内容之一,同时也将为后继学习奠定基础.

2. 本章内容呈现方式及特点.

(1)联系实际,突出同类量之间存在不相等关系的广泛性.教科书通过学生所熟悉的实际问题,充分展现知识发生发展的过程,关注新旧知识间的联系,进而引入不等式的有关概念,使学生经历用模型和符号表示实际问题的过程,以便加深对概念的理解和运用.如猜价格问题,小卡车赶超大卡车问题等.

(2)在探究不等式的性质和解法的过程中,利用数形结合的办法,帮助学生理解和掌握知识,如借助数轴探究不等式的性质,将不等式(组)的解集在数轴上表示出来等.通过类比,让学生发现不同知识间的联系,如将解一元一次不等式的过程和解一元一次方程的过程进行类比,有助于学生发现它们之间的异同,进而加深理解和运用.

(3)在用一元一次不等式解决实际问题中,教科书采用问题情境、一起探究的形式呈现,使学生初步体会一元一次不等式的建模过程,培养学生建立数学模型的能力.

二、教学目标

1. 经历从实际问题抽象出不等式的过程,能够根据具体问题中的数量大小关系了解不等式的意义.

2. 利用数形结合,通过观察、猜想、类比和归纳,探索不等式的基本性质,并能灵活运用这些性质解不等式.

3. 理解一元一次不等式和一元一次不等式组的解集的意义,能解数字系数的一元一次不等式,并能在数轴上表示其解集.会用数轴确定一元一次不等式组的解集,在解不等式组的过程中,体会数形结合的思想.

4. 知道解一元一次不等式和一元一次不等式组的一般步骤,掌握一元一次不等式(组)的解法.

5. 能根据具体问题中的数量关系,列出一元一次不等式,解决简单的实际问题,并能根据具体问题的实际意义,检验所求结果的合理性.

三、教学建议

1. 结合具体问题,让学生充分经历知识产生、发展的过程,关注与实际问题的紧密结合,让学生亲身感受不等式是表示同类量之间不相等关系的重要数学模型.
2. 关注新旧知识间的联系,提高知识的迁移能力. 类比方程进行不等式的教学,让学生在观察、思考中发现不等式和方程之间的联系和区别,体会两个数量之间的不相等关系,从整体上把握知识,提高综合运用知识的能力.
3. 加强思想方法的渗透,发展学生的思维能力. 如借助数轴探究不等式的性质,类比数的大小比较,归纳出不等式的性质,不等式的解集在数轴上的表示等内容,都应在教师引导下由学生主动观察、思考和探究,让学生体会其中渗透的数学思想方法.
4. 突出模型思想的渗透,提高学生数学化水平. 在本章中,实际问题情境贯穿于始终,数学建模思想是在一元一次方程和二元一次方程组的基础上的进一步强化和提高. 在教学中,既应关注前后知识的联系,又应关注学生对模型思想的进一步认识和理解.
5. 把握技能训练的要求,避免简单模仿或人为提高难度和技巧. 为保证学生掌握基本的运算技能,在教学中,应安排一定数量的练习,但难度不要超过教学目标的要求.
6. 突出应用,培养学生分析问题和解决问题的能力. 应用一元一次不等式解决实际问题时,应使学生从多角度思考和分析问题,经历完整的数学化过程,并注重培养学生有条理地表达自己思考过程的能力、分析问题和解决问题的能力.

四、课时建议

10.1 不等式	1 课时	10.2 不等式的基本性质	1 课时
10.3 解一元一次不等式	2 课时	10.4 一元一次不等式的应用	1 课时
10.5 一元一次不等式组	2 课时	回顾与反思	1 课时
机动	1 课时	合计	9 课时

五、评价建议

1. 关注学生从具体问题中抽象出不等式有关概念和探索不等式性质等过程的评价. 学生能否积极主动地独立思考,是否具有合作交流的意识等都应作为评价的内容.
 2. 对知识技能的评价,不能只注重学生对知识的记忆、运算的熟练程度和计算结果的正确与否,更应关注学生对知识是否理解,运算是否步步有据等. 如解一元一次不等式和一元一次不等式组时,应关注学生是否理解了不等式变形的依据和目的.
 3. 应特别关注对学生应用数学知识解决实际问题能力的评价. 用一元一次不等式解决实际问题时,要关注学生能否发现并提出问题,能否尝试从不同角度分析和解决问题,能否解释所得结果的合理性等.
- 评价时,对于学生的独特想法和见解,条理化的表述、概括和归纳,都应给予肯定和鼓励. 应从多角度、多方位、多层面对学生进行全面的评价,学生的点滴进步都要及时进行肯定和表扬,充分发挥评价的正面导向功能,调动学生参加数学活动的积极性.

第十章

一元一次不等式和一元一次不等式组

在本章中，我们将学习

- 不等式及不等式的性质
- 一元一次不等式(组)的解法
- 一元一次不等式的应用

电

视台播出猜商品价格的节目.

主持人：这个电热水壶的价格不高于100元，请您猜出价格.

参赛者：80元.

主持人：高了！

参赛者：60元.

主持人：低了！

你认为这个电热水壶的价格在什么范围内？



章题页简要地说明了本章将要学习的内容.

根据学生的生活经验,给出了一个学生熟悉的“猜价格”的不等式组的问题.这个问题既具有现实性,又具有趣味性.设置这个问题的目的,就是为了较好地激发学生对本章内容的学习兴趣,增加学习不等式欲望.

在教学中,教师可以利用章题页提供的情境设计成学生参与的游戏活动,并以此来导入新课.

教学目标

- 1. 经历从具体问题情境中建立不等式模型的过程,进一步发展学生的符号意识.
- 2. 了解不等式的意义,能够认识到不等式是表示同类量之间不相等关系的重要数学模型.

观察与思考

从实际中的具体问题到建立模型,用不等式表示的过程,应让学生先独立完成,再相互交流.

- 1. $a > 15.2$;
- 2. $m > 60$.

一起探究

在问题情境中,从列代数式、填表感悟数量之间的关系、列不等式等几个方面进行分析,都是为了让学生感受数学化的过程.

10.1 不等式

现实生活中存在着相等与不相等的数量关系问题. 对于不相等的数量关系问题,需要借助于不等式的知识来研究.

我们知道,用不等号“ $>$ ”“ $<$ ”可以表示两个数之间的大小关系,如 $7 > 3$, $-5 < -2$ 等.

观察与思考

1. 小明与小亮进行百米训练,小明先到达终点. 小明到达终点所用的时间为 15.2 s . 如果小亮所用的时间为 $a\text{ s}$, 那么 a 与 15.2 之间的关系可以表示为_____.



2. 小明在某一周的零用钱为 m 元, 他在这一周的支出情况如下表:

为灾区捐款	就餐	购买文具	买冷饮
5 元	50 元	3 元	2 元

在略有节余的情况下, m (元) 与 60 (元) 之间的关系可以表示为_____.

一起探究

在高速公路上, 有大、小两辆卡车从甲地向乙地运货. 大卡车的行驶速度为 60 km/h , 小卡车的行驶速度为 80 km/h , 大卡车比小卡车早出发 1 h .



教学建议

在设置教学活动的过程中,关注学生数学化的过程,引导学生认识到不等式与方程之间的联系和区别.

- 1. 通过“观察与思考”中两个简单不等式的实际问题,让学生初步感受同类量之间的不相等关系怎样用符号来表示,初步体会和认识不等式.
- 2. 在“一起探究”中,应给学生留出足够的时间,让学生按自主探究、合作交流的方式来完成探究活动,切忌教师灌输式的分析讲解.
- 3. 在教学过程中,教师要引导学生认识到,现实生活中,同类量之间的不相等关系是普遍存在的,使学生体会到学习不等式知识的重要性.

- (1) 如果设小卡车行驶的时间为 x h, 那么它行驶的路程该怎样表示? 这时, 大卡车行驶的路程又该怎样表示?
- (2) 小卡车赶上或超过大卡车后, 它们所行驶的路程之间的关系应怎样表示?
- (3) 完成下表:

小卡车行驶的时间 x/h	小卡车行驶的路程/ km	大卡车行驶的路程/ km
1	80	120
2	160	180
3	240	240
4		
5		
6		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- (4) 小卡车开出多少小时后赶上或超过大卡车?
- 经探究, 我们可以得到小卡车赶上和超过大卡车, 两车行驶路程的关系式分别为
- $80x=60(x+1)$ 和 $80x>60(x+1)$.
- 由列表可知, 当 $x=3$ 时, $80x=60(x+1)$;
- 当 $x>3$ 时, $80x>60(x+1)$.
- 即当 $x\geqslant 3$ 时, $80x\geqslant 60(x+1)$.
- 像 $7>3$, $-5<-2$, $a>15.2$, $60<m$, $x\geqslant 3$, $80x\geqslant 60(x+1)$ 这样的式子都是用不等号连接而成的. 我们把用不等号 “ $>$ ” “ $<$ ” “ $\geqslant$ ” 或 “ $\leqslant$ ” 连接而成的式子叫做**不等式**(inequality). 其中 “ $\geqslant$ ” 表示 “不小于”, 读作 “大于或等于”; “ $\leqslant$ ” 表示 “不大于”, 读作 “小于或等于”.

- (1) 小卡车行驶的路程为 $80x$ km, 大卡车行驶的路程为 $60(x+1)$ km;
- (2) 小卡车赶上大卡车的关系为:
- $80x=60(x+1)$.
- 小卡车超过大卡车的关系为:
- $80x>60(x+1)$.
- (3) 小卡车行驶的路程依次为:
- 320 km, 400 km, 480 km.
- 大卡车行驶的路程依次为:
- 300 km, 360 km, 420 km.
- (4) 3 h.

试着做做

$$(1) 3y \geq 8.$$

$$(2) m + 10 \leq \frac{1}{2}m.$$

$$(3) 340 + 8x > 400.$$

练习

$$1. a < b.$$

$$2. (1) a < 0.$$

$$(2) x > -1.$$

$$(3) m - n \leq 2.$$

$$(4) x - (-5) > 0.$$

习题

A 组

$$1. 5, 8, 8.2, 9, 9.5, 12.$$

$$2. (1) 2x + 3 < 15.$$



试着做做

用不等式表示:

$$(1) y \text{ 的 } 3 \text{ 倍不小于 } 8.$$

$$(2) m \text{ 与 } 10 \text{ 的和不大于 } m \text{ 的一半.}$$

(3) 某湖, 汛前水位是 340 cm, 警戒水位是 400 cm. 汛期, 湖水平均每天上涨 8 cm, x 天后湖水将超过警戒水位.



练习

1. 如图, 数轴上 A, B 两点对应的数分别为 a, b , 则 a 与 b 的大小关系是_____. (用不等式表示)



(第1题)

2. 用不等式表示:

$$(1) a \text{ 是负数.}$$

$$(2) x \text{ 比 } -1 \text{ 大.}$$

$$(3) m \text{ 与 } n \text{ 的差不大于 } 2.$$

$$(4) x \text{ 与 } -5 \text{ 的差是正数.}$$



习题

A 组

1. x 取下列各数中的哪些数, 能使不等式 $x - 2 > 1$ 成立?

$-4, -1, 0, 3, 5, 8, 8.2, 9, 9.5, 12.$

2. 用不等式表示下列数量关系:

$$(1) x \text{ 的 } 2 \text{ 倍与 } 3 \text{ 的和小于 } 15.$$

- (2) y 的一半与 1 的差是负数.
- (3) x 与 8 的和比 x 的 8 倍大.
- (4) $3x$ 与 1 的和不小于 6.
- (5) 长为 a , 宽为 $a-2$ 的长方形的面积小于边长为 $a+1$ 的正方形的面积.

B 组

- 1. 小明家距新华书店的路程是 8 km. 他于星期日上午 8:30 由家出发骑车前往书店购书, 先以 15 km/h 的速度行驶了 x h 后, 又以 18 km/h 的速度继续行驶, 结果, 他在 9:00 之前赶到了书店. 请你列出相应的不等式.
- 2. 某超市在春节期间搞促销活动, 促销方式如下:

一次性购物的金额	促销方式
不超过 200 元	全部九折
超过 200 元	不超过 200 元的部分九折, 超过 200 元的部分八折

- 某顾客在该超市一次性购得标价为 x 元的商品.
- (1) 该顾客得到的优惠不超过 18 元, 请你列出不等式.
 - (2) 该顾客得到的优惠超过 30 元, 请你列出不等式.

- (2) $\frac{1}{2}y-1<0$.
- (3) $x+8>8x$.
- (4) $3x+1\geqslant 6$.
- (5) $a(a-2)<(a+1)^2$.

B 组

- 1. $15x+18(0.5-x)>8$.
- 2. (1) $0.1x\leqslant 18$.
- (2) $0.1\times 200+0.2(x-200)>30$.

教学目标

- 1. 通过观察、对比和归纳,探究不等式的基本性质,体会不等式变形和等式变形的区别和联系.
- 2. 掌握不等式的基本性质,并能够熟练运用.

一起探究

“一起探究”中的展现方式渗透了:沿相同方向将两个点平移相等的距离后,对应的数的大小关系不变,进而直观得出不等式的性质 1.

(1) $a+3>b+3$.

(2) $a+c>b+c$.

(3) $a-M>b-M$,
(M 为数或整式).

一起探究

让学生通过对数的计算、比较,发现不等式的基本性质 2 和基本性质 3.

教学建议

- 不等式的基本性质是解不等式的依据.
- 1. 不等式基本性质 1 是借助数轴,并利用数与点的对应关系以及平移后点与点之间的关系,引导学生探究、归纳出的. 教学中,应充分关注这个过程,若可能,还可补充“减一个具体数”的情况,以加深学生对“基本性质 1”的认识和理解.
 - 2. 关于不等式的基本性质 2 和 3,教师也可以再补充一些实际例子.
 - 3. 为加深对不等式性质的理解,教材中设计了一道例题. 在教学中,应根据学生的实际,适当引导学生仿照解一元一次方程的方式,逐步将一元一次不等式转化为 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式,其重点是让学生明白转化的依据就是不等式的基本性质. 教师可根据需要,适当添加一些练习,以丰富课堂内容,达到巩固和掌握性质的目的.

10.2 不等式的基本性质

利用等式的基本性质可以解方程. 类似地,利用不等式的基本性质也可以解不等式. 那么,不等式具有什么性质呢?

如图 10-2-1, 当 $a>b$ 时, 在数轴上表示 a 的点位于表示 b 的点的右侧.



图 10-2-1

一起探究

在数轴上, 与 $a+3$, $b+3$ 对应的点和与 a , b 对应的点之间具有如下的位置关系:

数	点的位置变化
$a+3$	相当于将与 a 对应的点向右平移 3 个单位长度
$b+3$	相当于将与 b 对应的点向右平移 3 个单位长度

- (1) 确定 $a+3$ 和 $b+3$ 的大小.
- (2) 如果 $c>0$, 那么对于 $a+c$ 和 $b+c$ 的大小, 你有什么猜想?
- (3) 在不等式 $a>b$ 的两边都减去同一个数或同一个整式, 你认为应该有什么结论?

通过探究, 我们可以得到:
不等式两边都加上(或减去)同一个数或同一个整式, 不等号的方向不变. 即

不等式的基本性质 1

如果 $a>b$, 那么 $a\pm c>b\pm c$.

一起探究

- 1. 已知 $8>3$, 计算并用不等号填空:

.....

$$8 \times 2 \quad 3 \times 2; \quad 8 \times (-2) \quad 3 \times (-2).$$

$$8 \times \frac{1}{2} \quad 3 \times \frac{1}{2}; \quad 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \quad 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right).$$

$$8 \times 0.01 \quad 3 \times 0.01; \quad 8 \times (-0.01) \quad 3 \times (-0.01).$$

2. 对于 $8 > 3$ ，在不等式两边同乘一个正数，不等号的方向改变吗？在不等式两边同乘一个负数，不等号的方向会怎样？

3. (1) 通过上面的探究，你有什么发现？

(2) 再举几个例子，验证你的结论。

通过探究，我们可以得到：

不等式的两边都乘(或除以)同一个正数，不等号的方向不变，即

不等式的基本性质 2

如果 $a > b$ ，且 $c > 0$ ，那么 $ac > bc$ 。

不等式的两边都乘(或除以)同一个负数，不等号的方向改变，即

不等式的基本性质 3

如果 $a > b$ ，且 $c < 0$ ，那么 $ac < bc$ 。

例 根据不等式的基本性质，把下列不等式化成“ $x > a$ ”或“ $x < a$ ”的形式：

(1) $x - 1 > 2$; (2) $2x < x + 2$;

(3) $\frac{1}{3}x < 4$; (4) $-5x > 20$ 。

解：(1) $x - 1 > 2$,

$$x - 1 + 1 > 2 + 1 \quad (\text{不等式的基本性质 1}),$$

$$x > 3.$$

(2) $2x < x + 2$,

$$2x - x < x + 2 - x \quad (\text{不等式的基本性质 1}),$$

$$x < 2.$$

(3) $\frac{1}{3}x < 4$,

$$3 \times \frac{1}{3}x < 3 \times 4 \quad (\text{不等式的基本性质 2}),$$

$$x < 12.$$

(4) $-5x > 20$,

$$\frac{-5x}{-5} < \frac{20}{-5} \quad (\text{不等式的基本性质 3}),$$

$$x < -4.$$

不等式两边都除以 -5，不等号方向要改变。

1. $>, <, >, <, >$,
 $<$.

2. 方向不改变，方向改变。

3. (1) 不等式的两边都乘同一个正数，不等号的方向不改变；不等式的两边都乘同一个负数，不等号的方向改变。

(2) 略。

练习

- (1) $<$; (2) $<$;
(3) $<$; (4) $>$.
- (1) $x < -5$; (2) $x > 1$;
(3) $x > -8$; (4) $x > \frac{1}{2}$.

习题

A 组

- (1) $>$; (2) $>$;
(3) $>$; (4) $>$;
(5) $<$; (6) $<$.
- (1) $x < 14$;
(2) $x < -1$;
(3) $x > 6$;
(4) $x > -1$;
(5) $x < 2$;
(6) $x < -\frac{1}{7}$.

B 组

- $<$.
- $m < 0$.
- $a > 0$.



练习

- 已知 $a < b$, 请用 “ $>$ ” 或 “ $<$ ” 填空:
(1) $a - 2$ _____ $b - 2$; (2) $3a$ _____ $3b$;
(3) $a + c$ _____ $b + c$; (4) $-\frac{1}{2}a$ _____ $-\frac{1}{2}b$.
- 把下列不等式化为 “ $x > a$ ” 或 “ $x < a$ ” 的形式:
(1) $x + 3 < -2$; (2) $9x > 8x + 1$;
(3) $\frac{1}{2}x > -4$; (4) $-10x < -5$.



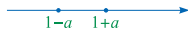
习题

A 组

- 已知 $a > b$, 请用 “ $>$ ” 或 “ $<$ ” 填空:
(1) $a + \frac{7}{2}$ _____ $b + \frac{7}{2}$; (2) $a - 6$ _____ $b - 6$;
(3) $4a$ _____ $4b$; (4) $\frac{a}{5}$ _____ $\frac{b}{5}$;
(5) $-a$ _____ $-b$; (6) $-\frac{a}{8}$ _____ $-\frac{b}{8}$.
- 把下列不等式化为 “ $x > a$ ” 或 “ $x < a$ ” 的形式:
(1) $x - 5 < 9$; (2) $6x < 4x - 2$;
(3) $\frac{5}{3}x > x + 4$; (4) $-4x < x + 5$;
(5) $\frac{x}{2} + 1 > x$; (6) $-\frac{x+1}{2} > \frac{2x-1}{3}$.

B 组

- 已知 $a > b$, 则 $-\frac{1}{2}a + c$ _____ (填 “ $>$ ” “ $<$ ” 或 “ $=$ ”) $-\frac{1}{2}b + c$.
- 已知 $a < b$, 且 $ma > mb$, 求 m 的取值范围.
- 表示 $1-a$ 和 $1+a$ 的点在数轴上的位置如图所示, 请确定 a 的取值范围.



(第3题)

10.3 解一元一次不等式

根据不等式的基本性质，怎样解一元一次不等式呢？

对于含有未知数的不等式，能使不等式成立的未知数的值，叫做不等式的解(solution of inequality).

如 $x=4, 5, 6$ ，都是不等式 $80x>60(x+1)$ 的解。



试着做做

1. 对给定的 x 的值，完成下表：

x	$80x$	$60(x+1)$	x 的值是不是 $80x>60(x+1)$ 的解
3.5	280	270	是
4.1	328	306	是
5.4			
6.8			

2. 请你再任意选择两个大于 3 的 x 的值，检验其是不是不等式的解。

3. 你认为不等式 $80x>60(x+1)$ 的解有多少个？

不等式 $80x>60(x+1)$ 的解有很多，我们把它的所有解叫做这个不等式的解集^[1]。

一个含有未知数的不等式的所有解组成这个不等式的解集(solution set)。

求不等式解集的过程，叫做解不等式(solving inequality)。

不等式的解集，可以在数轴上表示出来。

例如，不等式 $80x>60(x+1)$ 的解集为 $x>3$ ，在数轴上表示，如图 10-3-1 所示。

第十章 一元一次不等式和一元一次不等式组 | 123

教学目标

1. 理解不等式的解及其解集的意义，能够在数轴上表示不等式的解集。

2. 掌握解一元一次不等式的一般步骤，会解简单的一元一次不等式，提高学生的运算能力。

3. 类比解一元一次方程和解一元一次不等式的过程，发展学生的思维能力。

[1] 对于解集这一概念，学生明白它是指满足不等式的所有解即可，不必深究。

试着做做

通过“试着做做”，让学生体会不等式的解及解集的意义。

1. 432, 384, 是，

544, 468, 是。

2. 是。

3. 无数个。

教学建议

本节内容主要是不等式的解及解集的概念，解集在数轴上的表示，一元一次不等式的概念及解法。难点是对解集的理解。在教学中，应关注问题的展开过程，注意结合具体问题，强化学生对解集的认识和理解。

1. 因为一元一次不等式的解有无数多个，所以，学生对不等式解集的理解有一定的难度。因此，在教学中，应适当增加一些与解集相关的例子，以加深学生对解集的理解。

2. 引导学生利用不等式的基本性质，类比一元一次方程的解法来解不等式，以达到知识的迁移和发展，学会融会贯通。教学的重点不在题目的难度，而是掌握研究问题的一般方法。在这一过程中，要让学生体会到：

(1) 移项变形对不等式也同样适用；



图 10-3-1

数轴上用空心
圆圈表示 3, 指的
是解集中不包含 3.

又如, $-2x \geq 2$ 的解集为 $x \leq -1$, 在数轴上表示, 如图 10-3-2 所示.



图 10-3-2

数轴上用实心
点表示 -1, 指的
是解集中包含 -1.

大家谈谈

引导学生类比一元一次方程, 发现并归纳这几个不等式的共同特点, 进而形成一元一次不等式的概念.

在前面遇到了这样的不等式:

$$x > 3, 80x > 60(x+1), m+10 \leq \frac{1}{2}m, 2x < x+2.$$

请你说说这些不等式的共同特点是什么, 并与同学进行交流.

我们把含有一个未知数, 并且未知数的次数都是 1 的不等式叫做一元一次不等式(linear inequality of one unknown).

下面, 我们利用不等式的基本性质来解一元一次不等式.

例 1 解不等式 $\frac{1}{2}x+1 < 5$, 并把解集在数轴上表示出来.

解: 不等式两边都减去 1, 得

$$\frac{1}{2}x < 5-1,$$

即

$$\frac{1}{2}x < 4.$$

两边都乘 2 (或除以 $\frac{1}{2}$), 得

$$x < 8.$$

解集在数轴上表示, 如图 10-3-3 所示.

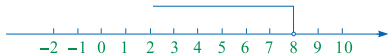


图 10-3-3

这里, 类似于
解方程中的移项
变形.

(2) 解不等式也可以先去分母, 再进一步化简.



练习

1. 把下列不等式的解集在数轴上表示出来:

(1) $x \geq -3$;

(2) $x < \frac{3}{2}$.

2. 解不等式 $-2x > \frac{8}{3}$, 并把解集在数轴上表示出来.



习题

A 组

1. 解下列不等式, 并把它们的解集在数轴上表示出来:

(1) $2x + 2 < 6$;

(2) $-3x > \frac{1}{2}$;

(3) $x + 5 > -x$;

(4) $\frac{1-x}{4} < 1$.

2. 写出下列数轴上所表示的不等式的解集:



(第2题)

B 组

1. 已知关于 x 的不等式 $x < a + 1$ 的解集与不等式 $\frac{x}{2} < -1$ 的解集完全相同,

求 a 的值.

2. 已知 $3x + 4 \leq 6 + 2(x - 2)$, 请你确定 $x + 1$ 的最大值.

练习

1. 略.

2. $x < -\frac{4}{3}$, 数轴表示略.

习题

A 组

1. (1) $x < 2$, 数轴表示略.

(2) $x < -\frac{1}{6}$, 数轴表示略.

(3) $x > -\frac{5}{2}$, 数轴表示略.

(4) $x > -3$, 数轴表示略.

2. (1) $x < 1.5$.

(2) $x \geq -3$.

B 组

1. $a = -3$.

2. -1 .

做一做

经过上一节课的学习,学生已能够类比解一元一次方程的过程来解不等式,所以,应该让学生独立完成“做一做”。

(1) $x < 4$, 数轴表示略.

(2) $x \geq \frac{1}{2}$, 数轴表示略.

大家谈谈

解一元一次不等式和解一元一次方程的步骤基本上是一样的,所不同的是在不等式的两边同乘(或除以)同一个负数时,不等号的方向要改变.



做一做

解下列不等式,并把它们的解集在数轴上表示出来:

(1) $14 + 3(x - 5) < 11$;

(2) $\frac{x+5}{2} - 1 \leq \frac{3x+2}{2}$.



大家谈谈

1. 请你谈谈解一元一次不等式的一般步骤.
2. 解一元一次不等式和解一元一次方程的过程有什么异同? 与同学进行交流.

事实上,解一元一次不等式的一般步骤是:去分母,去括号,移项,合并同类项,将未知数系数化为1.

解一元一次不等式和解一元一次方程的过程基本相同,只是在解不等式时,当不等式的两边都乘(或除以)同一个负数时,要改变不等号的方向.

例2 当 x 在什么范围内取值时,代数式 $\frac{1+2x}{3}$ 的值比 $x+1$ 的值大?

解:根据题意, x 应满足不等式

$$\frac{1+2x}{3} > x+1.$$

去分母,得

$$1+2x > 3(x+1).$$

去括号,得

$$1+2x > 3x+3.$$

移项,合并同类项,得

$$-x > 2.$$

将未知数系数化为1,得

$$x < -2.$$

即当 $x < -2$ 时,代数式 $\frac{1+2x}{3}$ 的值比 $x+1$ 的值大.

教学建议

1. 首先给学生足够的时间,类比解一元一次方程的过程,独立完成“做一做”,教师应关注学习困难学生的情况,并及时给予点拨和引导.

2. 就学生的解答过程和所得结果进行“大家谈谈”,归纳出解一元一次不等式的一般步骤.这一过程中,教师应鼓励学生积极发表自己的意见和见解,只要表述清楚,思路正确,就应给予肯定和表扬.

3. 运用解不等式的知识解决数学中的具体问题(例2、例3),建议在教师的指导下由学生独立完成.

例3 求不等式 $\frac{x+1}{2} \geq \frac{2x-1}{3}$ 的正整数解.

解: 去分母, 得

$$3(x+1) \geq 2(2x-1).$$

去括号, 得

$$3x+3 \geq 4x-2.$$

移项, 合并同类项, 得

$$-x \geq -5.$$

将未知数系数化为1, 得

$$x \leq 5.$$

所以, 满足这个不等式的正整数解为 $x=1, 2, 3, 4, 5$.

练习

1. 解下列不等式, 并把它们的解集在数轴上表示出来:

(1) $3(x-1)-2 > 5x+1$;

(2) $3+4x < \frac{1}{2}(3+5x)$.

2. 3 与 $2a$ 的差不小于1, 求 a 的取值范围.

习题

A 组

1. 解下列不等式, 并把它们的解集在数轴上表示出来:

(1) $10-3(x+6) \leq 1$;

(2) $4(x-3)-5 \geq 2(x-1)$;

(3) $\frac{x-2}{3} < \frac{x-1}{2}$;

(4) $\frac{1}{2}(3x-1)+x > 6x-8$.

练习

1. (1) $x < -3$, 数轴表示略.

(2) $x < -1$, 数轴表示略.

2. $a \leq 1$.

习题

A 组

1. (1) $x \geq -3$, 数轴表示略;

(2) $x \geq \frac{15}{2}$, 数轴表示略;

(3) $x > -1$, 数轴表示略;

(4) $x < \frac{15}{7}$, 数轴表示略.

2. (1) $x < -\frac{2}{5}$.

(2) $x < -32$.

(3) $x \leq \frac{13}{15}$.

B 组

1. $x \leq \frac{17}{7}$, 正整数解为

1, 2.

2. 21.

2. (1) 当 x 取什么值时, 代数式 $5x+2$ 的值是负数?

(2) 当 x 取什么值时, 代数式 $x+20$ 的值小于 $\frac{1}{2}x+4$ 的值?

(3) 当 x 取什么值时, 代数式 $\frac{6x+1}{3}$ 的值不大于 $-\frac{x-5}{2}$ 的值?

B 组

1. 试求不等式 $x - \frac{5+2x}{3} \geq \frac{3x-1}{2} - 4$ 的正整数解.

2. 如图, 要使输出值 y 大于 100, 则输入的最小正整数 x 是_____.



(第 2 题)

10.4 一元一次不等式的应用

我们能利用方程的方法解决一些现实生活中数量相等关系的问题. 实际上, 现实生活中还存在着许多数量之间的不相等关系. 在这些问题中, 有些可以用类似于列方程的方法, 通过列一元一次不等式来解决.

七年级(一)班的学生准备用 500 元购买甲、乙两种图书共 12 套, 送给老区的幼儿园小朋友. 已知甲种图书每套 45 元, 乙种图书每套 40 元. 这些钱最多能买甲种图书多少套?



一起探究

1. 设可购买甲种图书 x 套, 则购买甲种图书用钱为_____元, 购买乙种图书_____套, 购买乙种图书用钱为_____元.
2. 购买甲、乙两种图书所用钱数与 500 元有什么关系? 你能用不等式把这种关系表示出来吗?
3. 解上面列出的不等式, 并根据解集确定实际问题的答案.

例 某商场响应国家“家电下乡”的惠农政策, 决定采购一批电冰箱, 优惠销售给农民朋友. 商场从厂家直接购进甲、乙、丙三种不同型号的电冰箱共 80 台, 其中, 甲种电冰箱的台数是乙种电冰箱台数的 2 倍, 购买三种电冰箱的总金额不超过 132 000 元. 已知甲、乙、丙三种电冰箱每台的出厂价格分别为 1 200 元, 1 600 元和 2 000 元. 那么该商场购进的乙种电冰箱至少为多少台?

分析: 数量之间的关系是

$$1\,200 \times \text{甲种冰箱数} + 1\,600 \times \text{乙种冰箱数} + 2\,000 \times \text{丙种冰箱数} \leq 132\,000.$$

教学目标

1. 类比列一元一次方程解应用题的方法, 能从实际问题中抽象出数量之间的不相等关系, 会解决有关一元一次不等式的简单问题.

2. 体会不等式在解决实际问题中的作用, 发展学生的应用意识、分析和解决问题的能力.

一起探究

目的是分层提出问题, 降低探究难度, 且使探究过程具有可操作性.

1. $45x, 12-x, 40(12-x)$.

2. 购买甲、乙两种图书所用钱数小于或等于 500 元.

$$45x + 40(12-x) \leq 500.$$

3. $x \leq 4$, 最多能买 4 套甲种图书.

教学建议

1. 让学生充分经历从具体问题中抽象出不等式模型的过程. 教学中, 应引导学生类比列方程解应用题的基本方法, 分析问题中数量之间的不等关系, 设适当的未知数, 列不等式, 解不等式, 确定实际问题的解. 教师应引导学生用这样的思考方式来研究问题, 并尽可能让学生独立完成.

2. 由学生将具体问题转化为数学问题(列出一元一次不等式), 并求出不等式的解集后, 应注意引导学生根据不等式的解集, 确定出实际问题的答案.

3. 教学中, 在学生认真思考的前提下, 进行交流与合作, 在学生探究的过程中, 体会不等式的建模思想.

练习

1. 小明的体重应小于 25 kg.
2. 每月至少要生产这种服装 1 250 件.

习题

A 组

1. 设从事甲工种的工人为 x 名, 得 $150 - x \geq 2x$.
解得 $x \leq 50$. 答: 从事甲工种的工人最多可招聘 50 名.

解: 设购买乙种电冰箱 x 台, 则购买甲种电冰箱 $2x$ 台, 丙种电冰箱 $(80 - 3x)$ 台.

根据题意列不等式, 得

$$1\ 200 \times 2x + 1\ 600x + 2\ 000(80 - 3x) \leq 132\ 000.$$

解这个不等式, 得

$$x \geq 14.$$

答: 至少购进乙种电冰箱 14 台.

在用不等式解决实际问题时, 当求出不等式的解集后, 还要根据问题的实际意义确定问题的解.



练习

1. 如图, 小明和爸爸、妈妈三人玩跷跷板, 小明和妈妈坐在一端, 爸爸坐在另一端. 三人的体重一共为 150 kg, 小明的体重是妈妈体重的一半. 根据“爸爸端着地”的情境, 指出小明的体重应小于多少千克.



(第 1 题)

2. 某服装厂计划生产一种服装, 每件成本是 60 元, 售价是 80 元. 该厂生产这种服装, 每月除成本外的其他开支共为 5 000 元. 如果想使生产这种服装的月获利不低于 20 000 元, 那么每月至少要生产这种服装多少件?



习题

A 组

1. 某工程队计划招聘从事甲、乙两种工作的工人共 150 名. 根据工程需要, 从事乙工种的人数不少于从事甲工种人数的 2 倍. 从事甲工种的工人最多可招聘多少名?

2. 某商店在一次促销活动中规定:消费者消费不低于200元就可享受打折优惠.一名同学为班里买奖品,准备买6本影集和若干支钢笔.已知影集每本15元,钢笔每支8元,则他至少买多少支钢笔才能享受打折优惠?

B 组

1. 某旅游团的人数不到50,在参观一个景点时购买了一张50人的团体票,结果比按实际人数购买个人票省钱.这个景点的个人票票价是60元/人,团体票打八折.这个旅游团可能有多少人?
2. 某校组织七年级师生共480人春游,现有25座和45座(均含司机座位)两种客车可供租用.已知25座客车的租金为205元/辆,45座客车的租金为370元/辆.
 - (1) 若单独租用一种客车,请你通过计算说明租用哪种客车更合算.
 - (2) 该校决定这次春游同时租用这两种车辆.若45座客车比25座客车少租3辆,则45座客车最少需租用多少辆?这样的租车方式比单独租用一种车辆合算吗?说明你的理由.

2. 设购买钢笔 x 支可享受打折优惠,得 $6 \times 15 + 8x \geq 200$. 解得 $x \geq \frac{55}{4}$.

答:至少购买14支钢笔才可享受打折优惠.

B 组

1. 设这个旅游团有 x 人,可得 $60x > 50 \times 60 \times 80\%$. 解得 $x > 40$. 因为这个旅游团的人数不到50人,所以这个旅游团的人数可能有41,42,...,49人.
2. (1) 除司机1个座位外,25座客车可载学生24人,45座客车可载学生44人.若单租25座客车,则需租车 $480 \div 24 = 20$ (辆),租金为 $20 \times 205 = 4\,100$ (元);若单租45座客车,则需租车 $480 \div 44 = 10 \frac{10}{11} \approx 11$ (辆),租金为 $11 \times 370 = 4\,070$ (元). 所以,单独租用45座客车更合算.
(2) 设租45座客车 x 辆. 可得 $44x + 24(x + 3) \geq 480$. 解得 $x \geq 6$.

所以,至少租6辆45座客车.

因为 $6 \times 370 + 9 \times 205 = 4\,065$ (元),所以,这种租车方式比单独租用一种车辆合算.

教学目标

1. 经历从实际问题中抽象出不等式组及其解集的过程.

2. 理解一元一次不等式组及其解集的意义, 并能够利用数轴确定其解集.

3. 会解简单的一元一次不等式组.

[1]为了调动学生的积极性, 提高学生学习的兴趣, 有条件的可以组织学生模拟一个“猜价格”的游戏活动, 以加深学生对不等式组的认识和理解.

10.5 一元一次不等式组

在许多问题中, 所求的量常常需要满足两个或两个以上的不等关系. 这类问题就要用不等式组来解决.

电视台播出猜商品价格的节目.[1]



主持人: 这个电热水壶的价格不高于 100 元, 请您猜出价格.

参赛者: 80 元.

主持人: 高了!

参赛者: 60 元.

主持人: 低了!

你认为这个电热水壶的价格在什么范围内?

下面我们用不等式来研究这个问题.

设这个电热水壶的价格为 x 元, 由猜价格的过程可知

$$x < 80. \quad \text{①}$$

同时,

$$x > 60. \quad \text{②}$$

我们把不等式①和②的解集分别表示在数轴上, 如图 10-5-1 所示.



图 10-5-1

由此可知, 这个电热水壶的价格 x (元) 的范围是

$$60 < x < 80.$$

根据需要, 有时要把几个不等式组合在一起, 形成一组一元一次不等

教学建议

本节内容主要是一元一次不等式组的概念及解法, 难点是不等式组解集的确定. 在教学中, 为了便于学生理解不等式组及其解集的意义, 注意把不等式组和方程组进行比较, 以降低学习的难度.

1. 通过“猜价格”的游戏活动, 认识到价格是由两个条件来限制的, 自然得出不等式组. 这样引入, 一是增加了问题的趣味性, 二是体现了不等式组的现实意义.

2. 在求不等式组解集的过程中, 提倡学生借助数轴来确定解集, 这样, 一是直观, 二是便于确定.

式,如

$$\begin{cases} x < 80, \\ x > 60. \end{cases}$$

一般地,由若干个不等式组成的一组不等式,叫做不等式组.

含有同一个未知数的一元一次不等式的不等式组叫做一元一次不等式组(system of linear inequalities of one unknown).一元一次不等式组中所有不等式的解集的公共部分,叫做这个一元一次不等式组的解集^[2].

求不等式组的解集的过程,叫做解不等式组.

解一元一次不等式组时,一般是先分别求出每个不等式的解集,再借助数轴找出它们的公共部分,这样就可以确定出不等式组的解集.

例1 解不等式组

$$\begin{cases} \frac{x}{2} > \frac{x-3}{3}, & \text{①} \\ 9x-1 > 4(x+1). & \text{②} \end{cases}$$

解:解不等式①,得

$$x > -6.$$

解不等式②,得

$$x > 1.$$

在数轴上表示不等式①,②的解集,如图10-5-2所示.



图 10-5-2

这两个不等式解集的公共部分是 $x > 1$.

所以,不等式组的解集是 $x > 1$.



练习

1. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} 2x-4 < 0, \\ 3x+12 > 0; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x-2 \geq -5, \\ 9-6x > 8; \end{cases}$$

练习

$$1. (1) -4 < x < 2.$$

$$(2) -3 \leq x < \frac{1}{6}.$$

$$(3) -2 < x \leq 3.$$

$$(4) x \geq 4.$$

$$2. a > 2.$$

习题

A 组

$$(1) 2 < x < 8;$$

$$(2) 1 \leq x < 2;$$

$$(3) -4 < x \leq -2;$$

$$(4) -5 \leq x < 5;$$

$$(5) x > 8;$$

$$(6) \frac{2}{3} < x < 3.$$

B 组

$$1. -2 \leq k < 1.$$

$$2. \frac{5}{2} < x < 5.$$

$$(3) \begin{cases} 5x+4 > 3x, \\ \frac{x-1}{2} \leq \frac{2x-1}{5}; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 3x-2 > x+2, \\ \frac{1}{2}x-1 \geq 7-\frac{3}{2}x. \end{cases}$$

2. 已知 $4a+5$ 和 $2a-4$ 的值都是正数, 求 a 的取值范围.



习题

A 组

解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} x-8 < 0, \\ 5x-6 > 4; \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 4x+3 \geq 7, \\ 11-6x > -1; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} -3x \geq 6, \\ 2+5x > -18; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2(x-2) < 1+x, \\ 3x+5 \geq 2x; \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x+6 < 2x-2, \\ \frac{x-3}{3} \geq 1; \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \frac{x}{2} > \frac{x+1}{5}, \\ \frac{2x-1}{5} > \frac{x-1}{2}. \end{cases}$$

B 组

1. 代数式 $1-2k$ 的值大于 -1 , 但不大于 5 , 求 k 的取值范围.

2. 如果等腰三角形的周长为 10 , 求腰长 x 的取值范围.

例2 解不等式组

$$\begin{cases} 2(x-3) > 3x-7, \\ \frac{1}{2}x-1 > 3-\frac{3}{2}x. \end{cases}$$

①

②

解: 解不等式①, 得

$$x < 1.$$

解不等式②, 得

$$x > 2.$$

教学建议

本节内容是继续学习一元一次不等式组的解法.

1. 对于例2和例3, 从题目的结果以及要求上和例1相比有所变化, 不等式的系数相对复杂一些, 但是解题方法和思路没变, 所以, 在教学时, 应继续规范解题格式, 利用好数轴确定解集.

2. 在教学中, 教师要结合“大家谈谈”的内容, 引导学生对解不等式组的认识由具体上升到一般, 熟练掌握解不等式组的方法, 总结解不等式组的一般步骤.

在数轴上表示不等式①, ②的解集, 如图 10-5-3 所示.



图 10-5-3

从数轴上可以看出, 这两个不等式的解集没有公共部分. 所以, 这个不等式组无解.

两个不等式的解集可能会出现无公共部分的情况. 此时, 这个不等式组无解.

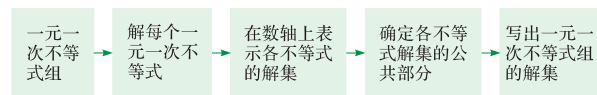
做一做

解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} \frac{x-2}{3} \leq 1, \\ 3x+2 \leq 11; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 5(x-1) > 3(x+1), \\ -\frac{7}{2}x-1 \geq 7-\frac{3}{2}x. \end{cases}$$

大家谈谈

请你结合下面的框图, 谈谈解一元一次不等式组的一般步骤.



例 3 求不等式组

$$\begin{cases} 4x+3 > 0, & \text{①} \\ 2x-5 < 0 & \text{②} \end{cases}$$

的整数解.

解: 解不等式①, 得

$$x > -\frac{3}{4}.$$

解不等式②, 得

$$x < \frac{5}{2}.$$

所以, 不等式组的解集是 $-\frac{3}{4} < x < \frac{5}{2}$.

因此, 不等式组的整数解是 0, 1, 2.

做一做

进一步熟悉解不等式组的过程, 巩固解不等式组的方法.

$$(1) x \leq 3.$$

$$(2) \text{无解}.$$

大家谈谈

让学生回顾例 2 和“做一做”的过程, 结合框图, 归纳总结解一元一次不等式组的一般步骤.

练习

- (1) $x < -1$;
(2) $x \leq -2$;
(3) $x \leq 1$;
(4) 无解.

2. 1, 2.

习题

A 组

- (1) $x < -3$;
(2) $x < 2$;
(3) 无解;
(4) 无解.
- 最大整数是 1, 最小整数是 -2.

B 组

- $m = -3$.
- $2 < m \leq 3$.



练习

1. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} 3(3x+1) < -6, \\ 5x+9 > 3(3x-1); \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 3x+5 \leq -1, \\ 3-x > \frac{1}{2}x; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x-2(x-1) \geq 1, \\ \frac{1+x}{2} > x-1; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x-5 \geq 2x-1, \\ 3x-2 > 4-\frac{3}{2}x. \end{cases}$$

2. 求不等式组 $\begin{cases} x-1 \geq 1-x, \\ x+8 > 4x-1 \end{cases}$ 的整数解.



习题

A 组

1. 解下列不等式组:

$$(1) \begin{cases} x+3 < 0, \\ 3(x-1) \leq 2x-1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 4(x+1) > 5x, \\ 2(x+1) > 3x; \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2(x+2) < 1+x, \\ 3x+2 > 2x; \end{cases} \quad (4) \begin{cases} \frac{1}{2}x+1 < x, \\ 2x-4 > 3x+3. \end{cases}$$

2. 求满足不等式组 $\begin{cases} 3x+5 \geq -1, \\ 3-x > \frac{1}{2}x \end{cases}$ 的最大整数和最小整数.

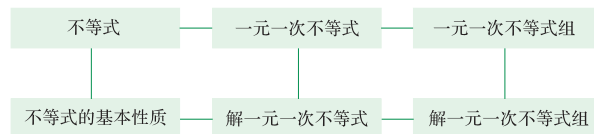
B 组

- 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} x > m-1, \\ x > m+2 \end{cases}$ 的解集是 $x > -1$. 求 m 的值.
- 已知方程组 $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 2x+y=m \end{cases}$ 的解 x 的值小于等于 1, y 大于 $\frac{1}{2}$. 求 m 的取值范围.

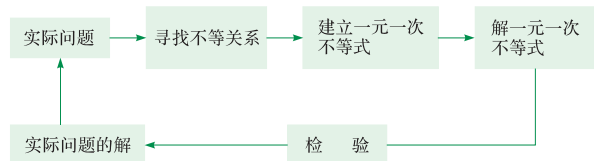


回顾与反思

一、知识结构



用一元一次不等式解决实际问题的过程:



二、总结与反思

1. 在一些涉及同类量之间不等关系的实际问题中,需要把相关的量用含未知数的代数式表示,根据问题中数量之间的不等关系,抽象为不等式这个数学模型,再利用不等式的基本性质,求出不等式的解集,然后检验其是否符合实际.在建立不等式模型的过程中,需要把握以下两点:

(1) 明确问题中常用的表示不相等关系词语的意义.如“大于”“超过”“还多”“高于”等抽象为“ $>$ ”,“小于”“不足”“还少”“低于”等抽象为“ $<$ ”,“不大于”对应“ $\leq$ ”,“不小于”对应“ $\geq$ ”.

(2) 在有些实际问题中,不相等关系是隐含在具体情境中的.如买东西,花去的钱应不超过原有的钱;汽车装运货物的质量应不超过汽车规定的载重量等.对于这类问题,要结合具体情况认真分析.

2. 想一想:不等式的基本性质是什么?利用不等式的基本性质解不等式时应注意什么?

3. 解一元一次不等式与解一元一次方程的过程有什么异同?如何确定一元一次不等式组的解集?

三、注意事项

1. 在不等式两边都乘(或除以)同一个负数时,要改变不等号的方向.不能用0同乘不等式两边.

教学目标

1. 回顾本章所学内容,构建知识间的内在联系.反思知识形成过程中所蕴含的数学思想方法和思维策略.

2. 运用所学不等式的有关知识解决实际问题,进一步培养学生的数学建模能力、分析和解决问题的能力.

教学建议

1. 对本章的知识内容,建议教师先设计一组思考题,引导学生进行充分思考后,再进行小组讨论和全班交流,然后由师生一起理清本章的知识脉络,梳理出知识结构图表.

2. 对知识内容总结的同时,更要注重对知识形成过程的反思和数学思想方法的渗透.在这一过程中,教师要结合具体问题让学生体会、理解与掌握.

教师在引导学生进行总结与反思时,可结合下列问题进行:

(1) 举出几个你身边具有不相等关系的事例,并用不等式表示.

(2) 现实生活中,哪些词语是表示不相等关系的?用数学符号如何表示?请举例说明.

(3) 一元一次不等式的解和一元一次方程的解有什么联系和区别?你对一元一次不等式(组)解集的概念是如何理解的?利用数轴表示一元一次不等式(组)的解集有什么作用?

复习题

A 组

- (1) 不等式的性质 1.
(2) 不等式的性质 2.
(3) 不等式的性质 3.
(4) 不等式的性质 1, 2.
- (1) $x > 11$, 数轴表示略;
(2) $x > -\frac{5}{3}$, 数轴表示略;
(3) $x > -2$, 数轴表示略;
(4) $x \geq -\frac{3}{7}$, 数轴表示略.
- (1) $x > -\frac{3}{4}$;
(2) $x = -\frac{3}{4}$;
(3) $x \leq -\frac{3}{4}$;
(4) $x \geq 6$.
- $x < \frac{36}{37}$.
- 1, 2, 3, 4.
- (1) $x > 2$. (2) $x \leq 1$.

2. 要注意不等式的解集 $x > a$ (或 $x < a$) 与 $x \geq a$ (或 $x \leq a$) 是不相同的, 前者不包含 a , 后者包含 a . 在数轴上表示时, 表示 a 的点前者用空心圆圈, 后者用实心点.

3. 解一元一次不等式组时, 如果各个一元一次不等式的解集没有公共部分, 那么这个一元一次不等式组无解.



复习题

A 组

- 指出下列不等式变形的根据:
(1) 由 $3x < 2x + 5$, 得 $x < 5$.
(2) 由 $2y > -4$, 得 $y > -2$.
(3) 由 $-\frac{1}{5}x < 1$, 得 $x > -5$.
(4) 由 $9x - 2 > 5x + 6$, 得 $x > 2$.
- 解下列不等式, 并把它们的解集在数轴上表示出来:
(1) $3x - 7 > 2x + 4$;
(2) $-6x + 1 < 11$;
(3) $4(2x - 1) < 5(3x + 2)$;
(4) $\frac{1-x}{2} \leq \frac{x-1}{5} + 1$.
- 当 x 为何值时, 代数式 $4x + 3$ 的值满足下列条件?
(1) 是正数; (2) 等于 0;
(3) 不大于 0; (4) 不小于 27.
- 当 x 为何值时, 代数式 $-\frac{1}{6}x + 3$ 的值比 $6x - 3$ 的值大?
- 求不等式 $-10x + 52 > 9$ 的正整数解.
- 解下列不等式组:
(1)
$$\begin{cases} 6x + 5 > 4x, \\ 18 - 7x < 10 - 3x; \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} x - 3(x - 2) \geq 4, \\ \frac{1 + 2x}{3} > x - 1; \end{cases}$$

请举例说明.

(4) 举例说明解一元一次不等式的步骤以及需要注意的问题. 它与解一元一次方程有什么异同? 解一元一次不等式组的步骤是怎样的? 应注意哪些问题?

(5) 应用一元一次不等式(组)解决实际问题的过程是怎样的? 需注意哪些问题? 请举例说明.

$$(3) \begin{cases} \frac{1}{4}(x+4) < 1, \\ x+2 > \frac{2(x+3)}{3}; \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 8(x-0.3) > x+11.6, \\ 15-x > -\frac{3}{4}x+3. \end{cases}$$

7. 张老师和学生们一起步行去植树. 他们步行的速度是 4 km/h. 出发 1 h 后, 学校打电话通知张老师在 10 min 内(含 10 min)返校开会, 并让张老师在原地等候, 学校立即派人骑摩托车去接他. 摩托车的速度至少为多大才能保证张老师按时参加会议?
8. 甲、乙两人准备整理一批新到的实验器材. 若甲单独整理, 则需要 40 min 完成; 若乙单独整理, 则需要 80 min 完成. 若乙单独整理时间不超过 30 min, 则甲单独整理至少多少分钟才能完成?

B 组

1. 已知 a, b 是常数, 且 $a \neq 0$, 关于 x 的不等式 $ax+b>0$:

(1) 当 _____ 时, 不等式的解集是 $x > -\frac{b}{a}$.

(2) 当 _____ 时, 不等式的解集是 $x < -\frac{b}{a}$.

2. 求不等式 $-2 \leq 3x-11 < 4$ 的整数解.

3. 观察下列图形:



(第3题)

它们是按一定规律排列的, 并且后一个图形中“★”的个数是依照排列规律递增的, 那么到第几个图形所用的“★”超过 100 个?

4. 已知一个三角形的最大角的度数为 $x+30$, 最小角的度数为 $2x-30$. 求 x 的范围.

(3) 无解. (4) $2 < x < 48$.

7. 设摩托车的速度为 x km/h, 则 $\frac{10}{60}x \geq 4 \times 1 \times 2$.

解得 $x \geq 48$.

答: 摩托车的速度至少为 48 km/h 才能保证张老师按时参加会议.

8. 甲单独整理至少 25 min 才能完成.

B 组

1. (1) $a > 0$. (2) $a < 0$.

2. 3, 4.

3. 到第 34 个图形所用的“★”超过 100 个.

4. $37.5 \leq x \leq 42$.

5. $0 < a < 1$.

6. 设汽车行驶的路程为 x km.

甲的费用: $1.1x$ 元.

乙的费用: $(3\ 000 + 0.1x)$ 元.

由 $1.1x < (3\ 000 + 0.1x)$, 解得 $x < 3\ 000$.

由 $1.1x = (3\ 000 + 0.1x)$, 解得 $x = 3\ 000$.

由 $1.1x > (3\ 000 + 0.1x)$, 解得 $x > 3\ 000$.

所以, 汽车每月行驶的路程少于 $3\ 000$ km 时, 租甲公司合算; 等于 $3\ 000$ km 时, 两公司租用费是一样的; 大于 $3\ 000$ km 时, 租乙公司合算.

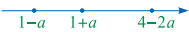
C 组

1. $a \geqslant 2$.

2. $k < \frac{5}{2}$.

3. 按原定价至少销售 426 件.

5. 已知 $1-a$, $1+a$ 和 $4-2a$ 在数轴上的位置如图所示. 求 a 的取值范围.



(第 5 题)

6. 某人想租用一辆汽车. 现有甲、乙两家出租公司, 甲公司的出租条件为汽车每行驶 1 km 需付租车费 1.10 元; 乙公司的出租条件为每月付 3 000 元租车费, 另外, 汽车每行驶 1 km, 租车人需再付 0.10 元汽车磨损费. 这个人租哪家的汽车较合算?

C 组

1. 当 a 为何值时, 不等式组 $\begin{cases} 2-3x < 8, \\ x+a > 0 \end{cases}$ 的解集是 $x > -2$?

2. 当 k 为何值时, 满足方程组 $\begin{cases} 3x+y=k, \\ y=2x \end{cases}$ 的 x 和 y 的值都小于 1?

3. 某商厦以 200 元/件的价格购进某种商品 1 000 件, 在进价基础上加价 25% 作为销售定价. 商厦计划在节日期间拿出 100 件按九折出售, 而在销售淡季按六折甩卖. 为使这批商品赢利, 需要在节日和淡季之外按原定价销售这种商品多少件?