第十一章教学说明和建议

一、设计说明

1. 本章的内容、地位和作用.

本章的主要内容是因式分解的概念和分解因式的两种方法.

因式分解是以整式运算为基础的，是整式的一种恒等变形，也是后续学习分式的化简与运算、解一元二次方程的重要基础. 同时，它还有助于进一步发展学生的观察、发现、归纳和概括的能力以及分析问题和解决问题的能力.

2. 本章内容呈现方式及特点.

(1)创设了学生充分探索与交流的空间. 无论是建立因式分解的概念，还是探索因式分解的方法，教科书都精心创设了具有启发性的问题情境，给学生留出了充分探索与交流的空间，突出了学生的主体地位.

(2)关注学生已有的经验，突出了知识的形成过程. 在建立因式分解的概念中，教科书通过类比整数分解因数，让学生体会、认识因式分解的意义. 在分解因式方法的探索中，借助于因式分解与整式乘法的互逆关系，由学生通过观察、归纳和概括获得分解方法. 这样，学生不但获得了知识，而且体会了数学基本思想和思维方式.

二、教学目标

1. 在经历建立因式分解概念的过程中，了解分解因式的意义.

2. 引导学生经历探索分解因式方法的过程，体会数学知识的内在联系.

3. 能用提公因式法、公式法(平方差公式、完全平方公式)分解因式.

4. 在建立因式分解概念与探索分解因式方法的过程中，进一步发展学生观察、归纳和概括的能力，发展学生的运算能力和推理能力.

三、教学建议

1. 注重学生经历探究的过程，积累数学活动经验.

创设出计算的情境后，在两种计算方法的对比中感受到化为“因式乘积”的形式的意义，利用整式乘法与分解因式之间的互逆关系，进而揭示出分解因式的本质属性，即把一个多项式化为几个因式乘积的形式. 这样的过程不仅能使学生理解分解因式的意义，更重要的是有利于学生自主探究精神的培养，以及使学生获得宝贵的数学活动经验. 同理，对分解因式方法的学习，也应重视教科书创设的教学情境.

2. 注重推理能力的培养.

应当把因式分解概念与方法的学习过程，看做是培养学生推理能力的过程. 教科书设计了让学生从观察、发现到归纳、概括的活动过程，为学生发现问题、提出问题提供了空间，也为发展学生归纳的思维方式创设了氛围. 不应简单地把用概念进行判断，运用已获得方法进

行分解因式看做是巩固知识、习得技能的过程，更应当是演绎思维训练的过程. 已建立起的概念和获得认可的方法就是演绎推理的大前提，所以，这里的每一次判断与分解因式都可视为演绎推理的过程，用以培养演绎的思维方式.

3. 发展学生的符号意识.

教师应善于透过有形的知识，把蕴含其中的数学核心概念适时地渗透到教学中. 本章自始至终都在运用符号进行表达、变形、运算，这对提升学生的“符号意识”是大有裨益的.

4. 注重基本的运算技能，避免繁琐的题型训练.

对因式分解的理解以及方法的掌握是一个不断加强、提升的过程. 因此教学中要依据教科书的要求，适当地分阶段进行必要的训练，使学生在理解每一步算理的基础上提高因式分解的技能. 教学中要避免过于繁琐的运算，不要过分追求题目的数量与难度.

四、课时建议

11.1	因式分解	1 课时
11.2	提公因式法	1 课时
11.3	公式法	2 课时
	回顾与反思	1 课时
	机　动	1 课时
	合　计	6 课时

五、评价建议

1. 知识与技能的评价. 一是要关注学生对因式分解方法的理解和掌握，这常表现在对多项式的变形是否为因式分解的判断，面对一个具体问题能否选择恰当的因式分解方法并综合运用这些方法进行因式分解. 二是关注基本运算和变形的准确和灵活运用，反对繁难运算，不提倡追求特殊技巧. 三是知识与技能的掌握，是个渐进的过程，不应在初始阶段就提出过高的要求.

2. 对数学思考和数学学习能力的评价. 把学生在学习活动中表现出来的观察、实验、归纳、概括、演绎、类比等数学思维过程作为重要的评价内容.

3. 关注学生在学习中表现出的积极态度、克服困难的精神等方面的评价，更要关注在课堂上对这些方面的及时评价.

第十一章

因式分解

在本章中，我们将学习

- 因式分解
- 用提公因式法分解因式
- 用公式法分解因式

整式乘法 $\rightleftarrows$ 因式分解

多项式乘法是把几个整式的乘积化为一个多项式．反过来，你能将一个多项式分解成几个整式乘积的形式吗？

$$ma+mb=m(a+b)$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

章题图表达了本章将要学习的核心内容——因式分解.

图中用符号语言反映了整式相乘的过程与分解因式的过程的互逆关系，让学生感受到因式分解的本质特征.

* * * * * * * * * * *

教学目标

1. 了解多项式的因式分解的意义，知道因式分解与整式乘法之间的区别和联系.

2. 感受因式分解在解决相关问题中的作用.

观察与思考

多项式的因式分解是整数的因数分解的继续和发展. 多项式的因式分解不仅可以用来简化运算，而且在后续的学习中还会经常用到.

小亮的方法较简单.

大家谈谈

两个多项式相乘的结果是一个多项式，相乘的过程是多项式中的单项式与单项式相乘.

将一个多项式进行因式分解的结果是若干个整式的乘积，因式分解的过程是这个多项式分解成若干个整式乘积的形式.

因式分解的过程与多项式相乘的过程恰恰相反，具有互逆关系.

11.1 因式分解

在小学阶段，我们由数的乘法运算获得启发，建立了因数的概念. 类似地，我们是否可以探索从整式的乘法获得类似“因数”的概念呢?

观察与思考

观察下面计算 $2\,011^2-2\,011\times2\,010$ 和 37^2-36^2 的过程，哪种更简便?

小明的方法	小亮的方法
$2\,011^2-2\,011\times2\,010$	$2\,011^2-2\,011\times2\,010$
$=4\,044\,121-4\,042\,110$	$=2\,011\times(2\,011-2\,010)$
$=2\,011.$	$=2\,011.$
37^2-36^2	37^2-36^2
$=1\,369-1\,296$	$=(37+36)(37-36)$
$=73.$	$=73.$

小亮的方法是运用了乘法对加法的分配律以及平方差公式，运算较简单.

现在，我们来研究多项式的因式分解问题.

由整式的乘法运算，我们知道：

$x(x-2)=x^2-2x$，　$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$，　$(x+1)^2=x^2+2x+1$.

反过来，可以把这些多项式写成整式乘积的形式：

$x^2-2x=x(x-2)$，　$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，　$x^2+2x+1=(x+1)^2$.

像这样，把一个多项式分解成几个整式乘积的形式，叫做多项式的**因式分解**(factorization)，也叫做将多项式**分解因式**(factoring). 其中每个整式都叫做这个多项式的因式.

大家谈谈

1. 多项式相乘的结果是什么?
2. 一个多项式进行因式分解的结果是什么?

因式分解的结果是几个整式乘积的形式.

教学建议

1. 在“观察与思考”的活动中，通过观察对数进行的简便运算，认识到将含加减运算的算式化为因数积的意义. 这个活动由学生的观察引发思考，让学生切实体会到因数分解给计算带来的方便.

2. 类比把“数”的算式化为积的形式，提出“如何把一个多项式化为积的形式?”，再引导学生借助于整式乘法，“反过来”就能把一个多项式写成整式乘积的形式，从而建立因式分解的概念，并得到可借助于整式乘法对多项式进行因式分解的认识，为探究因式分解的方法奠定基础.

3. “大家谈谈”是从变形的结果理清多项式相乘与因式分解的联系与区别，以加深对因式分解概念的理解. 因此，应引导学生在观察上面具体实例的基础上进行交流，并形成共识.

多项式的因式分解与乘法运算是不同的．多项式的因式分解是把一个多项式化成几个整式的乘积，而多项式的乘法运算是把几个整式的乘积化成一个多项式．

多项式的因式分解与多项式的乘法运算是相反的变形过程．

$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ 多项式 $x+y$ 与 $x-y$ 的乘积为 x^2-y^2

$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$ 多项式 x^2-y^2 分解为 $x+y$ 与 $x-y$ 的乘积

做一做

1．下列各式中，从等号左边到右边的变形，哪些是多项式的因式分解？

(1) $x^2-4=(x+2)(x-2)$；　(2) $x^2+4x+4=(x+2)^2$；

(3) $7m+14n=7(m+2n)$；　(4) $x(y+1)=xy+x$．

2．下列对多项式的变形，哪些是因式分解？是因式分解的，指出它的各因式．

(1) $x^2-x=x(x-1)$；　(2) $10x+5y=5(2x+y)$；

(3) $a^2-1=(a+1)(a-1)$；　(4) $x^2-2x+1=(x-1)^2$．

练　习

1．下列各式从等号左边到右边的变形，哪些是因式分解？

(1) $(m+n)(m-n)=m^2-n^2$；　(2) $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$；

(3) $5a+10b=5(a+2b)$；　(4) $x^2-2x+1=x(x-2)+1$．

2．请将下列等式左边多项式的另一个因式填在括号里：

(1) $2x+4=2(\quad)$；　(2) $x-xy=x(\quad)$；

(3) $16x^2-1=(4x+1)(\quad)$；(4) $a^2+6a+9=(a+3)(\quad)$．

习　题

1．对下列各式所进行的因式分解正确吗？如果不正确，请改正过来．

(1) $ab-b=b(a-1)$；　(2) $-10x-10=-10(x-1)$；

(3) $3x+3y=3(x+y)$；　(4) $m^2+4m+4=m^2+4(m+1)$．

2．请将下列等式左边多项式的另一个因式填在括号里：

(1) $2R-2r=2(\quad)$；　(2) $3mn-6nx=(\quad)(m-2x)$；

(3) $3ax+3ay=3a(\quad)$；　(4) $10ax-15xy+5x=5x(\quad)$．

做一做

1．(1)(2)(3)是，(4)不是．

2．(1)(2)(3)(4)都是．各因式分别是：

(1)x，$x-1$；

(2)5，$2x+y$；

(3)$a+1$，$a-1$；

(4)$x-1$，$x-1$．

练　习

1．(2)(3)是．

2．(1)$x+2$；　(2)$1-y$；

(3)$4x-1$；　(4)$a+3$．

习　题

1．(1)正确；

(2)不正确，应为：$-10(x+1)$；

(3)正确；

(4)不正确，应为：$(m+2)^2$．

2．(1)$R-r$．

(2)$3n$．

(3)$x+y$．

(4)$2a-3y+1$．

＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊

4．应注意及时运用因式分解的概念进行判断．这样，既可以巩固概念，还可以作为演绎思维训练的过程．

目标

1. 了解公因式及提公因式法.

2. 会用提公因式法把多项式分解因式.

观察与思考

明确一个多项式中各项的公因式是提取公因式的前提条件,应让学生充分体验这个过程.

做一做

运用上一环节中获得的概念和方法写出公因式时,应引导学生注意系数的公因数也是公因式.

1. (1)$3x$;(2)a;(3)ab;(4)$2xy$.

11.2 提公因式法

提公因式法是进行多项式因式分解的最基本方法之一. 用提公因式法分解因式的关键是确定多项式的公因式.

观察与思考

1. 多项式 $ma+mb+mc$ 有几项? 每一项的因式都有哪些? 这些项中有没有公共的因式? 若有, 是哪个?

2. 多项式 ab^2-2a^2b 的两项中, 有没有公共的因式? 若有, 是哪些?

实际上, 有:

多项式	项	各项的公共因式
$ma+mb+mc$	ma, mb, mc	m
ab^2-2a^2b	ab^2, $-2a^2b$	a, b, ab

一般地, 多项式的各项都含有的因式, 叫做这个多项式各项的**公因式**(common factor), 简称多项式的公因式.

逆用乘法对加法的分配律, 可以把公因式写在括号外边, 作为积的一个因式, 写成下面的形式:

$$ma+mb+mc=m(a+b+c),$$
$$ab^2-2a^2b=ab(b-2a).$$

这种将多项式分解因式的方法, 叫做提公因式法.

做一做

1. 写出下列多项式的公因式:

(1) $6x-9x^2$;

(2) $abc+2a$;

(3) $abc-ab^2+2ab$;

(4) $2x^2y+4xy^2-6xy$.

* * * * * * * * * * *

教学建议

1. "观察与思考"活动是从具体例子中寻找"公共的因式",从而建立公因式的概念. 要让学生充分经历这一活动,以认识公因式,为提取公因式分解因式作好准备. 一个多项式的公因式可能不止一个,但其中次数最高的公因式只有一个(不计系数). 这一点应提及但不宜给出概念,待用"提公因式法分解因式"时,以"将所有的公因式都提出来"进行讲解为宜.

2. 通过考察具体示例中的方法,使学生理解提公因式法的算理就是逆用乘法分配律,在此基础上,给出提公因式法的概念.

3. 通过"做一做"和"大家谈谈"的活动,概括提公因式法应注意的一些事项:

(1)确定公因式时,不仅要注意"字母"公因式,也要注意"数字"公因数.

(2)提取公因式时,要提出全部的公因式,否则不是最后的分解结果.

2. 先指出下列多项式的公因式，再进行因式分解：

(1) x^2+2x；　　(2) $2x^2+4x$；

(3) $2a^2x-6ax^2$；　　(4) $4a^4-12a^3+16a^2$.

大家谈谈

在“做一做”中，三名同学对多项式 $2x^2+4x$ 分解因式的结果如下：

(1) $2x^2+4x=2(x^2-x)$；

(2) $2x^2+4x=x(2x+4)$；

(3) $2x^2+4x=2x(x+2)$.

请你谈谈用提公因式法分解因式应注意的问题.

一般地，当多项式的各项系数都是整数时，公因式的系数应取各项系数的最大公约数，字母应取各项相同的字母，且相同字母的指数取次数最低的.

例 1 把下列多项式分解因式：

(1) $-3x^2+6xy-3xz$；　　(2) $3a^3b+9a^2b^2-6a^2b$.

解：(1)
$$\begin{aligned}&-3x^2+6xy-3xz\\=&(-3x)\cdot x+(-3x)\cdot(-2y)+(-3x)\cdot z\\=&-3x(x-2y+z).\end{aligned}$$

> 公因式的系数是负数时，提公因式后各项要变号.

(2)
$$\begin{aligned}&3a^3b+9a^2b^2-6a^2b\\=&3a^2b\cdot a+3a^2b\cdot 3b-3a^2b\cdot 2\\=&3a^2b(a+3b-2).\end{aligned}$$

做一做

把 $5ab^3-10b^2c+5b^2$ 分解因式.

例 2 分解因式：$2a(b+c)-5(b+c)$.

解：
$$\begin{aligned}&2a(b+c)-5(b+c)\\=&(b+c)\cdot 2a-(b+c)\cdot 5\\=&(b+c)(2a-5).\end{aligned}$$

> 把 $b+c$ 看成一个整体“提”出来.

2.(1)公因式是 x，分解为：

$x(x+2)$；

(2)公因式是 $2x$，分解为：

$2x(x+2)$；

(3)公因式是 $2ax$，分解为：

$2ax(a-3x)$；

(4)公因式是 $4a^2$，分解为：

$4a^2(a^2-3a+4)$.

大家谈谈

从正反两方面的例子概括出“分解因式要彻底”，以及本页中提到的规律.

做一做

$5b^2(ab-2c+1)$

练 习

1. (1) $5(a+b)$;

(2) $m(m+1)$;

(3) $x(x+2)$;

(4) $3x(y+z)$.

2. $5a^2$, $5a^2(1+2bc)$;

$3xy$, $3xy(4z-3xy)$;

$2x$, $2x(x+2y-3)$.

3. (1) $-x(2-y+z)$;

(2) $-7ab(1+2x-7y)$;

(3) $(x+2y)(m-2n)$;

(4) $(x-y)(3x-2y)$.

习 题

A 组

1. (1) $5(2a-c)$;

(2) $ab(1-2c)$;

(3) $xy(5-z)$;

(4) $a(a+b-c)$.

2. (1) $2xy(x-2yz)$;

(2) $7ab(a+2bc)$;

练 习

1. 把下列各式分解因式：

(1) $5a+5b$;

(2) m^2+m;

(3) x^2+2x;

(4) $3xy+3xz$.

2. 把下列多项式的公因式和分解因式的结果填入表格中：

多项式	公因式	分解因式的结果
$5a^2+10a^2bc$		
$12xyz-9x^2y^2$		
$2x^2+4xy-6x$		

3. 把下列各式分解因式：

(1) $-2x+xy-xz$;

(2) $-7ab-14abx+49aby$;

(3) $m(x+2y)-2n(x+2y)$;

(4) $2(x-y)^2-x(y-x)$.

习 题

A 组

1. 把下列各式分解因式：

(1) $10a-5c$;

(2) $ab-2abc$;

(3) $5xy-xyz$;

(4) $a^2+ab-ac$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $2x^2y-4xy^2z$;

(2) $7a^2b+14ab^2c$;

(3) $15mn^2p^2-5mnp$;

(4) $4ab-6ab^2$.

3. 把下列各式分解因式：

(1) $4a^2b^2-ab^2$；

(2) $-12a^2b^2c+4a^2b^2+2ab^2c$；

(3) $-4x^2y^2+8x^2y-8xy$；

(4) $x(x+y)(x-y)-x(x-y)^2$.

4. 用简便方法计算：

(1) $2\,001^2-2\,001$；

(2) $2\,005\times2\,006-2\,005\times2\,004+8\times2\,005$.

5. 某商场共有三层，第一层有商品$(a+b)^2$种，第二层有商品$a(a+b)$种，第三层有商品$b(a+b)$种. 这个商场共有多少种商品？请将结果进行因式分解.

B 组

1. 当 $x=37$ 时，用简便方法求 x^2-36x 的值.
2. 已知 $x^2+3x=-2$，求 $5x^{1\,000}+15x^{999}+10x^{998}$ 的值.
3. a 是整数，请说明 a^2+a 一定能被 2 整除的理由.

(3)$5mnp(3np-1)$；

(4)$2ab(2-3b)$.

3. (1)$ab^2(4a-1)$；

(2)$-2ab^2(6ac-2a-c)$；

(3)$-4xy(xy-2x+2)$；

(4)$2xy(x-y)$.

4. (1)原式

$=2\,001\times(2\,001-1)$

$=2\,001\times2\,000$

$=4\,002\,000$；

(2)原式

$=2\,005\times(2\,006-2\,004+8)$

$=2\,005\times10$

$=20\,050$.

5. $(a+b)^2+a(a+b)+b(a+b)$

$=(a+b)(a+b+a+b)$

$=2(a+b)^2$.

B 组

1. $x^2-36x=x(x-36)$，将 $x=37$ 代入，得 $37\times(37-36)=37$.

2. $5x^{1\,000}+15x^{999}+10x^{998}$

$=5x^{998}(x^2+3x+2)$

$=5x^{998}(-2+2)=0$.

3. $a^2+a=a(a+1)$. 若 a 为偶数，则$(a+1)$必为奇数；若 a 为奇数，则$(a+1)$必为偶数. 在 $a(a+1)$中，a，$a+1$ 必有一个是偶数，所以 a^2+a 一定能被 2 整除.

教学目标

1. 经历用乘法公式探究分解因式方法的过程，体会从正反两个方面认识和研究事物的方法.

2. 会用公式法分解因式.

试着做做

(1) $(p+4)(p-4)$；

(2) $(y+2)(y-2)$；

(3) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$；

(4) $(2a+b)(2a-b)$.

11.3 公式法

整式相乘与因式分解是互为相反的过程. 如果把学过的乘法公式逆过来使用，那么就可以将某些多项式分解因式.

实际上，把平方差公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

反过来，就得到

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

这样就成为分解因式的一个公式了.

试着做做

试着将下面的多项式分解因式：

(1) $p^2-16=$________；　(2) $y^2-4=$________；

(3) $x^2-\frac{1}{9}=$________；　(4) $4a^2-b^2=$________.

如果一个多项式可化为两个整式的平方差的形式，那么它就可以用平方差公式分解因式了.

例 1　把下列各式分解因式：

(1) $4x^2-9y^2$；　(2) $(3m-1)^2-9$.

解：(1) $4x^2-9y^2$

$=(2x)^2-(3y)^2$

$=(2x+3y)(2x-3y)$.

(2) $(3m-1)^2-9$

$=(3m-1)^2-3^2$

$=(3m-1+3)(3m-1-3)$

$=(3m+2)(3m-4)$.

例 2　把下列各式分解因式：

(1) a^3-16a；　(2) $2ab^3-2ab$.

教学建议

1. 提出问题后，可由学生先完成“试着做做”的活动，然后再用整式乘法去验证. 在学生互相交流的基础上再进行总结概括.

2. 运用平方差公式分解因式的关键是要正确把握公式的特征，即两数平方的差 a^2-b^2，可化为两数和与两数差的积 $(a+b)(a-b)$. 用平方差公式分解因式时，公式中的 a，b 可以是单项式，也可以是多项式，如例 1.

3. 在分解因式时，有时需要用两种或两种以上的方法，如果有公因式，就要先提取公因式，再用平方差公式，如例 2.

解：(1) a^3-16a
$=a(a^2-16)$
$=a(a+4)(a-4).$

(2) $2ab^3-2ab$
$=2ab(b^2-1)$
$=2ab(b+1)(b-1).$

当多项式有公因式时，应先提出公因式，再看能否利用平方差公式进行因式分解.

练 习

1. 下面分解因式的结果是否正确？如果不正确，指出错在哪里，并改正过来.

(1) $4x^2-y^2=(4x+y)(4x-y)$；

(2) $ab^2-9a^3=(b+3a)(b-3a)$.

2. 运用公式法分解因式：

(1) $25a^2-16b^2$；　(2) $a^2b^2-\frac{1}{9}c^2$；

(3) $(a+2b)^2-4$；　(4) x^4-25x^2.

习 题

A 组

1. 把下列各式分解因式：

(1) $256-x^2$；　(2) $9x^2-64$；

(3) $\frac{1}{16}x^2-m^2n^2$；　(4) $9a^4-a^2$.

2. 下列各式可以用平方差公式分解因式吗？如果可以，请分解；如果不可以，请说明理由.

(1) x^2+y^2；　(2) $-x^2+y^2$；

(3) $-x^2-y^2$；　(4) x^2-81.

3. 把下列各式分解因式：

(1) $4x^2-100$；　(2) $12y^4-3y^2$；

(3) x^3-64x；　(4) $2a^4-50a^2$.

练 习

1. (1)不正确，应为：$(2x+y)(2x-y)$；

(2)不正确，应为：$a(b+3a)(b-3a)$.

2. (1)$(5a+4b)(5a-4b)$；

(2)$\left(ab+\frac{1}{3}c\right)\left(ab-\frac{1}{3}c\right)$；

(3)$(a+2b+2)(a+2b-2)$；

(4)$x^2(x+5)(x-5)$.

习 题

A 组

1. (1)$(16+x)(16-x)$；

(2)$(3x+8)(3x-8)$；

(3)$\left(\frac{1}{4}x+mn\right)\left(\frac{1}{4}x-mn\right)$；

(4)$a^2(3a+1)(3a-1)$.

2. (1)不可以，因为不满足平方差公式，也没有公因式可提取；

(2)可以，$(y+x)(y-x)$；

(3)不可以，因为不满足平方差公式，也没有公因式可提取；

(4)可以，$(x+9)(x-9)$.

3. (1)$4(x+5)(x-5)$；

(2)$3y^2(2y+1)(2y-1)$；

(3)$x(x+8)(x-8)$；

(4)$2a^2(a+5)(a-5)$.

4. (1) $(x+1+a)(x+1-a)$；

(2) $(2x+3+2m)(2x+3-2m)$；

(3) $(5x-1)(7-x)$；

(4) $(8x+y)(4x+3y)$.

5. 依题意，得：

$\pi R^2-4\pi r^2$

$=\pi(R+2r)(R-2r)$

$=\pi\times(8.6+1.4)(8.6-1.4)$

$=72\pi\approx 226.08(\text{cm}^2)$.

B 组

1. 原式

$=(x^2+1)(x^2-1)$

$=(x^2+1)(x+1)(x-1)$.

4. 把下列各式分解因式：

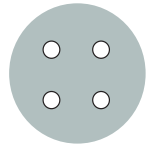
(1) $(x+1)^2-a^2$；

(2) $(2x+3)^2-4m^2$；

(3) $(2x+3)^2-(3x-4)^2$；

(4) $4(3x+y)^2-(2x-y)^2$.

5. 如图，在半径为 R 的圆形钢板上冲去半径为 r 的四个小圆孔. 若 $R=8.6$ cm，$r=0.7$ cm，请你利用因式分解的方法计算出剩余钢板的面积.（π 取 3.14）



（第 5 题）

B 组

1. 分解因式：x^4-1.

2. 计算：$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)$.

像平方差公式一样，若把完全平方公式反过来，就得到

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2,$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

这样，我们也可以利用完全平方公式把一些多项式进行因式分解.

例 3 把下列各式分解因式：

(1) $t^2+22t+121$；　　(2) $m^2+\frac{1}{4}n^2-mn$.

解：(1)
$$\begin{aligned}&t^2+22t+121\\=&t^2+2\times 11t+11^2\\=&(t+11)^2.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&m^2+\frac{1}{4}n^2-mn\\=&m^2-2\cdot m\cdot\frac{1}{2}n+\left(\frac{1}{2}n\right)^2\\=&\left(m-\frac{1}{2}n\right)^2.\end{aligned}$$

2. 原式 $=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{8}{9}\times\frac{10}{9}\times\frac{9}{10}\times\frac{11}{10}$（从第 2 项开始，依次两项相乘都等于 1）

$=\frac{1}{2}\times\frac{11}{10}$

$=\frac{11}{20}$.

大家谈谈

1. 下面的多项式能否用完全平方公式分解因式？请说明理由.

(1) $x^2+10x+25$；　(2) $4m^2-4m+1$；

(3) $4a^2+18ab+9b^2$；　(4) $m^2-4mn+4n^2$.

2. 具有什么特征的多项式能用完全平方公式分解因式？

例 4 把下列各式分解因式：

(1) $ax^2+2a^2x+a^3$；

(2) $(x+y)^2-4(x+y)+4$；

(3) $(3m-1)^2+(3m-1)+\frac{1}{4}$.

解：(1)
$$\begin{aligned}&ax^2+2a^2x+a^3\\=&a(x^2+2ax+a^2)\\=&a(x+a)^2.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&(x+y)^2-4(x+y)+4\\=&(x+y)^2-2\cdot(x+y)\cdot 2+2^2\\=&(x+y-2)^2.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}&(3m-1)^2+(3m-1)+\frac{1}{4}\\=&(3m-1)^2+2\cdot(3m-1)\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\\=&\left(3m-1+\frac{1}{2}\right)^2\\=&\left(3m-\frac{1}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

运用平方差公式和完全平方公式分解因式的方法叫做公式法.

练　习

1. 把下列各式分解因式：

(1) $2xy-x^2-y^2$；　(2) $36p^2+12pq+q^2$；

(3) $16x^2+8x+1$；　(4) $a^2-4a(b+c)+4(b+c)^2$.

大家谈谈

1. (1)能，分解因式得：$(x+5)^2$；

(2)能，分解因式得：$(2m-1)^2$；

(3)不能；

(4)能，分解因式得：$(m-2n)^2$.

2. 略.

练　习

1. (1) $-(x-y)^2$；

(2) $(6p+q)^2$；

(3) $(4x+1)^2$；

(4) $(a-2b-2c)^2$.

* * * * * * * * * * *

教学建议

1. 像探究用平方差公式分解因式一样，逆向应用完全平方公式，得出用完全平方公式分解因式的方法. 在这个过程中，教师应强调“逆用完全平方公式”，以区别因式分解与多项式相乘的不同.

2. 运用完全平方公式分解因式的关键是要正确把握公式的特征.“大家谈谈”的活动就是通过对实例的分析，概括出用完全平方公式进行因式分解的多项式特征：两数的平方和，加(或减)这两数积的二倍.

3. 对多项式进行因式分解的两种方法应及时总结.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $-x^2+2x-1$；　　(2) $x^2+xy+\frac{1}{4}y^2$；

(3) $4x^2+4x+1$；　　(4) a^4-2a^2+1.

习　题

A　组

1. 把下列各式分解因式：

(1) $x^2+8x+16$；　　(2) $64x^2+y^2+16xy$；

(3) $y^2+y+\frac{1}{4}$；　　(4) $\frac{1}{9}t^2+\frac{2}{3}ts+s^2$.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $6xy-x^2-9y^2$；　　(2) $-m^3+2m^2-m$；

(3) $3x^2-6x+3$；　　(4) $4xy^2+4x^2y+y^3$.

3. 把下列各式分解因式：

(1) $x^2-6x(y-z)+9(y-z)^2$；

(2) $(a+b)^2-4(a+b)c+4c^2$.

4. 用简便方法计算：$2\ 001^2-4\ 002+1$.

B　组

1. 把下列各式分解因式：

(1) x^4-8x^2+16；　　(2) $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$.

2. 请给 $4x^2+1$ 添上一个单项式，使新得到的多项式能运用完全平方公式分解因式.

152 | 数学　七年级下册

2. (1) $-(x-1)^2$；

(2) $\left(x+\frac{1}{2}y\right)^2$；

(3) $(2x+1)^2$；

(4) $(a^2-1)^2=(a+1)^2(a-1)^2$.

习　题

A 组

1. (1) $(x+4)^2$；

(2) $(8x+y)^2$；

(3) $\left(y+\frac{1}{2}\right)^2$；

(4) $\left(\frac{1}{3}t+s\right)^2$.

2. (1) $-(x-3y)^2$；

(2) $-m(m-1)^2$；

(3) $3(x-1)^2$；

(4) $y(2x+y)^2$.

3. (1) $(x-3y+3z)^2$；

(2) $(a+b-2c)^2$.

4. 原式$=(2\ 001-1)^2$

$=4\ 000\ 000$.

B 组

1. (1) $(x^2-4)^2=(x+2)^2(x-2)^2$；

(2) $(a^2+b^2+2ab)(a^2+b^2-2ab)=(a+b)^2(a-b)^2$.

2. 添加上$\pm4x$ 或 $4x^4$，可得多项式 $4x^2\pm4x+1=(2x\pm1)^2$ 或 $4x^4+4x^2+1=(2x^2+1)^2$.