

第十一章 因式分解

11.1 因式分解

• 知识点拨

前面我们学习整式乘法,知道多项式的乘法是把几个整式的乘积化成一个大项式,而多项式的因式分解是把一个大项式化成几个整式的乘积.显然,多项式的因式分解与多项式的乘法运算是相反的变形过程.

通过本节的学习,我们可以将某些多项式分解成几个整式乘积的形式.

• 知识与技能

1. 填空题.

(1) $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ 从左到右的变形是_____.

(2) $4x^2 - 9 = (2x+3)(2x-3)$ 从左到右的变形是_____.

(3) 计算①~③题,并根据计算结果将④~⑥题进行分解因式.

① $(x-2)(x-1) =$ _____.

② $3x(x-2) =$ _____.

③ $(x-2)^2 =$ _____.

④ $3x^2 - 6x =$ _____.

⑤ $x^2 - 4x + 4 =$ _____.

⑥ $x^2 - 3x + 2 =$ _____.

(4) $a^2 - 4 = (a+2)($ _____).

(5) $a^2 - 2a + 1 = ($ _____).

(6) $m^2 - 8m + 16 = ($ _____).


2. 选择题.

(1) 下列各式从左到右的变形,属于因式分解的是 ()

A. $(a+3)(a-3) = a^2 - 9$

B. $x^2 + x - 5 = (x-2)(x+3) + 1$

C. $a^2b + ab^2 = ab(a+b)$

D. $x^2 + 1 = x\left(x + \frac{1}{x}\right)$ 

(2) 下列各式从左到右的变形,属于因式分解的是 ()

A. $m(a+b) = ma + mb$

B. $ma + mb + 1 = m(a+b) + 1$

C. $(a+3)(a-2) = a^2 + a - 6$

D. $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

(3) 下列各因式分解正确的是 ()

A. $-x^2 + (-2)^2 = (x-2)(x+2)$

B. $x^2 + 2x - 1 = (x-1)^2$

C. $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

D. $x^2 - 4x = x(x+2)(x-2)$

(4) 观察下列计算 $962 \times 95 + 962 \times 5$ 的解题过程,方法最简单的是 ()

A. $962 \times 95 + 962 \times 5 = 962 \times (95 + 5) = 962 \times 100 = 96\ 200$

B. $962 \times 95 + 962 \times 5 = 962 \times 5 \times (19 + 1) = 962 \times (5 \times 20) = 96\ 200$

C. $962 \times 95 + 962 \times 5 = 5 \times (962 \times 19 + 962) = 5 \times (18\ 278 + 962) = 96\ 200$

D. $962 \times 95 + 962 \times 5 = 91\ 390 + 4\ 810 = 96\ 200$

(5) 一个多项式分解因式的结果是 $(b^3 + 2)(2 - b^3)$, 那么这个多项式是 ()

A. $b^6 + 4$

B. $4 - b^6$

C. $b^6 - 4$

D. $-b^6 - 4$

(6) 下列多项式能分解因式的是 ()

A. $x^2 - y$

B. $x^2 + 1$

C. $x^2 + y + y^2$

D. $x^2 - 4x + 4$

(7) 已知不论 x 为何值, $x^2 - kx - 15 = (x + 5)(x - 3)$ 始终成立, 则 k 的值为 ()

A. 2

B. -2

C. 5

D. -3

(8) 计算 $(-2)^{2\,001} + (-2)^{2\,002}$ 等于 ()

- A. $-2^{2\,001}$ B. $-2^{2\,002}$
 C. $2^{2\,001}$ D. -2

(9) 下列各式中, 分解因式的结果为 $(\frac{1}{2}x - 2y)(\frac{1}{2}x + 2y)$ 的是 ()

- A. $\frac{1}{4}x^2 - 4y^2$ B. $x^2 - 16y^2$
 C. $\frac{1}{4}x^2 - y^2$ D. $4y^2 - \frac{1}{4}x^2$

3. 下列各式所进行的因式分解是否正确? 如果不正确, 请改正过来.

(1) $x^3 - x = x(x^2 - 1)$;

(2) $-x^2 + y^2 = (x + y)(x - y)$;

(3) $x^2 - y^2 = (x - y)^2$;

(4) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$;

(5) $x^2 - 6x + 9 = (x + 3)^2$;

(6) $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.

• 数学思考

4. 若关于 x 的多项式 $3x^2 + mx + n$ 分解因式的结果为 $(3x + 2)(x - 1)$, 求 m, n 的值.



• 解决问题

5. 已知 $x^2 - 2x - 3 = 0$, 则代数式 $6 - 2x^2 + 4x$ 的值是多少?

6. $10^{12} - 9 \times 10^{10}$ 能被 91 整除吗? 为什么?

• 数学活动

7. 半径为 145 的圆面积比半径为 144 的圆面积大多少? (用 π 表示)

• 开阔视野

8. 从前有一只骄傲的蚊子, 它总认为自己的体重和牛一样重. 有一天, 蚊子找到了牛, 并说出了体重一样的理由.

它认为, 可以设自己的体重为 a , 牛的体重为 b , 则有

$$a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2.$$

左右两边分别化为

$$(a-b)^2 = (b-a)^2.$$

从而就有

$$a-b = b-a.$$

移项, 得

$$2a = 2b,$$

即

$$a = b.$$

蚊子骄傲地把自己的理由说完, 牛睁大了眼睛, 惊呆了!

请同学们想一想, 牛和蚊子的体重真的会一样吗? 如果不一样, 那么蚊子的证明究竟错在哪里呢?

11.2 提公因式法

• 知识点拨

逆用乘法对加法的分配律，把公因式写在括号的外边，作为积的一个因式，从而进行因式分解的方法叫做提公因式法。提公因式法在进行多项式因式分解的最基本的方法之一。

用提公因式法分解因式的关键是确定多项式的公因式。一般地，当多项式的各项系数都是整数时，公因式的系数应取各项系数的最大公约数，字母应取各项相同的字母，且相同字母的指数取次数最低的。公因式可以是单项式，也可以是多项式。

• 知识与技能

1. 填空题.

(1)指出下列多项式中各项的公因式：

① $ax+ay$ _____.

② $3mx-6my$ _____.

③ $4a^2+10a^3b$ _____.

④ $15a^2+5a$ _____.

⑤ x^2y+xy^2 _____.

⑥ $12x^3yz-9x^2y^2$ _____.

⑦ $8x^3y^2-12xy^3z$ _____.

⑧ $32p^2q^3-8pq^4m$ _____.

(2) $ma+mb+mc=m(\quad)$.

(3) $3a^2-6ab+a=\quad(3a-6b+1)$.

(4)若 $4x^3-6x^2=2x^2(2x+k)$ ，则 $k=\quad$.

(5)如果 $a+b=10$ ， $ab=21$ ，则 a^2b+ab^2 的值为_____.

(6)如果 $2a+3b=1$ ，那么 $3-4a-6b=\quad$.

2. 选择题.

(1)下列多项式中，应提取公因式 $5a^2b$ 的是 ()

A. $15a^2b-20a^2b^2$

B. $30a^2b^3-15ab^4-10a^3b^2$

C. $10a^2b-20a^2b^3+50a^4b$

D. $5a^2b^4-10a^3b^3+15a^4b^2$

(2)下列各组整式中，没有公因式的是 ()

A. $2a+b$ 和 $a+b$

B. $5m(a-b)$ 和 $-a+b$

C. $3(a+b)$ 和 $-a-b$

D. $2x-2y$ 和 2

(3)多项式 $-2a^{n-1}-4a^{n+1}$ 的公因式是 ()

A. $2a^n$

B. $-2a^n$

C. $-2a^{n-1}$

D. $-2a^{n+1}$

(4)下列各式中，用提公因式法因式分解正确的是 ()



A. $12abc-9a^2b^2=3abc(4-3ab)$

B. $3x^2y-3xy+6y=3y(x^2-x+2y)$

C. $-a^2+ab-ac=-a(a-b+c)$

D. $x^2y+5xy-y=y(x^2+5x)$

(5)把多项式 $(3a-4b)(7a-8b)+(11a-12b)(8b-7a)$ 分解因式的结果是 ()

A. $8(7a-8b)(a-b)$

B. $2(7a-8b)^2$

C. $8(7a-8b)(b-a)$

D. $-2(7a-8b)$

3. 用提公因式法分解因式.

(1) $8ab^2-16a^3b^3$;

(2) $-15xy-5x^2$;

$$(3) a^3 b^3 + a^2 b^2 - ab;$$

$$(8) 6x(x-y) - 4y(y-x);$$

$$(4) -3a^3 m - 6a^2 m + 12am;$$

$$(9) (1+x)(1-x) - (x-1);$$

$$(5) (x+y)^2 + mx + my;$$

$$(10) 3m(x-y) - 2(y-x)^2;$$

$$(6) 6(m+n)^2 - 2(m+n);$$

$$(11) m^2(a-2) + m(2-a);$$

$$(7) 6p(p+q) - 4q(q+p);$$

$$(12) 2a(y-z) + 3b(z-y);$$

(13) $12y(x-y)^2 - 8(x-y)^3$.

4. 已知 $a^2 + 2ab + b^2 = 0$. 求代数式 $a(a+4b) - (a+2b)(a-2b)$ 的值.

5. 已知 $x+y=5$, $xy=2$. 求 $x^2y + xy^2$ 和 $x^2 + y^2$ 的值.

• 数学思考

6. 化简 $5(2x-3) + 4(3-2x)$ 的结果是 ()

- A. $2x-3$ B. $2x+9$
 C. $8x-3$ D. $18x-3$

7. 观察下列各式:

$1^2 + 1 = 1 \times 2$;

$2^2 + 2 = 2 \times 3$;

$3^2 + 3 = 3 \times 4$;

⋮

请你将猜想到的规律用含自然数 $n(n \geq 1)$ 的式子表示出来 _____.

8. 把下列各式分解因式.

(1) $3(a-b)^2 - a(b-a)$;



(2) $m(m-n)^2 - n(n-m)^2$;

(3) $6(3x-1)^2 - 3x+1$.

• 解决问题

9. 利用因式分解简便计算.

(1) $57 \times 99 + 44 \times 99 - 99$;

(2) $21 \times 3.14 - 31 \times 3.14$;

(3) $29 \times 19.99 + 72 \times 19.99 + 13 \times 19.99 - 19.99 \times 14$.

10. 已知 $4x^2 + 7x + 2 = 4$. 求 $-12x^2 - 21x$ 的值.

11. $3^{2003} - 4 \times 3^{2002} + 10 \times 3^{2001}$ 能被 7 整除吗? 为什么?

• 数学活动

12. 将多项式 $a(x-y) + 2by - 2bx$ 分解因式, 正确的结果是 ()

A. $(x-y)(-a+2b)$

B. $(x-y)(a+2b)$

C. $(x-y)(a-2b)$

D. $-(x-y)(a+2b)$

你知道分解过程吗?

13. 不解方程组 $\begin{cases} 2x+y=6, \\ x-3y=1, \end{cases}$ 求 $7y(x-3y)^2 - 2(3y-x)^3$ 的值.

• 开阔视野

分解因式: $ab - ac + bc - b^2$.

分析: 首先把前两项分成一组, 后两项分成一组, 每一组可以提公因式, 然后再利用提公因式法即可. 这种方法叫做分组分解法.

$$\begin{aligned} \text{解: } & ab - ac + bc - b^2 \\ & = (ab - ac) + (bc - b^2) \\ & = a(b - c) - b(b - c) \\ & = (b - c)(a - b). \end{aligned}$$

11.3 公式法(一)

• 知识点拨

整式相乘与因式分解是互为相反的过程,因此把学过的乘法公式反过来使用就可以将某些多项式分解因式了. 即把平方差公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

反过来,得到

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

如果一个多项式可化为两个整式的平方差的形式,那么它就可以用平方差公式分解因式了.

当多项式有公因式时,应先提出公因式,再看能否利用平方差公式进行因式分解.

• 知识与技能

1. 下面各多项式可以用平方差公式分解因式吗? 如果可以,请分解; 如果不可以,请说明理由.

(1) a^2-4b^2 ;

(2) x^2+y^2 ;

(3) $-x^2-y^2$;

(4) $-x^2+y^2$;

(5) $\frac{25}{49}-\frac{1}{4}x^2$.

2. 把下列各式分解因式.

(1) $1-x^2=$ _____;

(2) $x^2-9=$ _____;

(3) $99^2-101^2=$ _____;

(4) $25x^2-49y^2=$ _____;

(5) $-m^2+n^2=$ _____;

(6) $64x^2-81=$ _____;

(7) $x^2y^2-z^2=$ _____;

(8) $0.09x^2-\frac{1}{4}y^2=$ _____;

(9) $-b^2+4a^2=$ _____;

(10) $\frac{1}{2}m^2n^2-8=$ _____.

3. 下面因式分解的结果是否正确? 如果不正确,指出错在哪里,并改正.

(1) $x^3-xy^2=x(x-y)^2$;

(2) $x^3-4x=x(x+4)(x-4)$;

(3) $8a^2-2=2(4a+1)(4a-1)$;

(4) $x^4-25x^2=(x^2+5x)(x^2-5x)$.

4. 把下列各式分解因式.

(1) $x - xy^2$;

(2) $-25 + m^2$;

(3) $2a^2 - 8$;

(4) $x^3y^2 - x^5$;

(5) $9a - ab^2$;

(6) $4a^2x^2 - 16a^2y^2$;

(7) $a^4 - 1$;

(8) $-3xy^3 + 27x^3y$;

(9) $3m(2x - y)^2 - 3mn^2$;

(10) $(x + y)^2 - (x - y + 1)^2$;

(11) $x^4 - y^4$;

(12) $(a + 2)(a - 8) + 6a$;

(13) $x^{m+3} - x^{m+1}$;

(14) $4 - 25(x - y)^2$;

(15) $(x+y)^2 - (x-y)^2$;

(16) $16(a-b)^2 - 9(a+b)^2$;

(17) $9(x-y)^3 + 4(y-x)$.

• 数学思考

5. 大正方形的周长比小正方形的周长长 96 cm, 它们的面积相差 960 cm^2 . 求这两个正方形的边长.



6. 已知 $a+b=2$. 求 a^2-b^2+4b 的值.

• 解决问题

7. 快速计算.

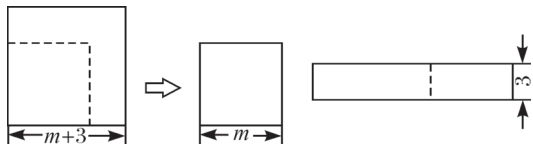
(1) $7.29^2 - 2.71^2$;

(2) $100 \frac{1}{2} \times 99 \frac{1}{2}$.

8. 已知 $a+b=8$, $a^2-b^2=48$. 求 a 和 b 的值.

• 数学活动

9. 如图, 在边长为 $(m+3)$ 的正方形纸片中剪出一个边长为 m 的正方形之后, 剩余部分可剪拼成一个长方形(不重叠无缝隙), 若拼成的长方形一边长为 3, 则另一边长为 ()



第9题

- A. $m+3$
 B. $m+6$
 C. $2m+3$
 D. $2m+6$

10. 求代数式 $(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{9^2})(1-\frac{1}{10^2})$ 的值.

然后提取公因式 $(a-1)$, 注意分解要彻底.

你能写出分解过程吗? 试一试.

12. 老师在黑板上写出三个算式: $5^2-3^2=8\times 2$, $9^2-7^2=8\times 4$, $15^2-3^2=8\times 27$. 王华接着又写了两个具有同样规律的算式: $11^2-5^2=8\times 12$, $15^2-7^2=8\times 22$.

(1) 请你再写出两个(不同于上面算式)具有上述规律的算式.

(2) 用文字写出反映上述算式的规律.

(3) 说明这个规律正确的理由.

• 开阔视野

对多项式 $8(x^2-2y^2)-x(7x+y)+xy$ 因式分解. 若再直接用前面的提公因式法、平方差公式法显然都不奏效了, 只好另辟新径.

$$\begin{aligned} \text{解: 原式} &= 8x^2 - 16y^2 - 7x^2 - xy + xy \\ &= x^2 - 16y^2 \\ &= (x+4y)(x-4y). \end{aligned}$$

这是“以退为进”的方略.

11. 分解因式 a^3-a^2-a+1 .

分析: 当被分解的式子是四项时, 应考虑运用分组分解法进行分解. 本题应采用两两分组,

11.3 公式法(二)

• 知识点拨

像平方差公式一样,若把完全平方公式

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

反过来,就得到 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$.

这样,我们就可以把某些符合完全平方公式特征的多项式进行因式分解了.公式中的 a, b 既可以代表一个单项式,也可以代表一个多项式.

运用公式法进行因式分解可以简化某些计算.

• 知识与技能

1. 填空题.

(1)试着把下列各式分解因式:

① $a^2 - 2ab + b^2 =$ _____.

② $16x^2 + 24xy + 9y^2 =$ _____.

③ $-x^2 + 4xy - 4y^2 =$ _____.

④ $2a^2 - 4a + 2 =$ _____.

⑤ $1 - x + \frac{1}{4}x^2 =$ _____.

(2)已知 $a^2 + 4a + 4 + |b - 3| = 0$, 则 $a + b =$ _____.

2. 选择题.

(1)下列各式能用完全平方公式进行分解因式的是 ()

A. $x^2 + 1$ B. $x^2 + 2x - 1$

C. $x^2 + x + 1$ D. $x^2 + 4x + 4$

(2)若 $x^2 - 4x + a^2$ 是完全平方式, 则 a 等于 ()

A. 4 B. 2 C. ± 4 D. ± 2

(3)下列多项式中, 不能用完全平方公式分解因式的是 ()

A. $m + 1 + \frac{m^2}{4}$ B. $-x^2 + 2xy - y^2$

C. $-a^2 + 14a + 49$ D. $\frac{n^2}{9} - \frac{2}{3}n + 1$

3. 下列各多项式能否用完全平方公式分解因式?若能,请找出相应的 a 和 b .

(1) $x^2 - 12x + 36$;

(2) $-2xy - x^2 + y^2$;

(3) $-2xy - x^2 - y^2$;

(4) $4x^2 - 2x + 1$;

(5) $x^2 - x + \frac{1}{4}$;

(6) $\frac{x^2}{9} + 1 - \frac{2}{3}x$.

4. 把下列各式分解因式.

(1) $-4a^2 + 4a - 1$;

(2) $x^2y - 4xy + 4y$;

(3) $3a + 12a^2 + 12a^3$;

(4) $16 - 8(x - y) + (x - y)^2$;

(9) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$;

(5) $a^4b - 6a^3b + 9a^2b$;

(10) $-2ax^{n-1} - 18ax^{n+1} + 12ax^n$;

(6) $-4x^2y + 12xy^2 - 9y^3$;

(11) $(x - 2)^2 + 2(2 - x) + 1$;

(7) $(a - b)^2 + 12(a - b) + 36$;

(12) $-a^3 + a^2b - \frac{1}{4}ab^2$;

(8) $\frac{m^2n^2}{9} + \frac{2mn^3}{3} + n^4$;

(13) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2$;

(14) $(x^2+1)^2-4x^2$.

5. 若 $|a+b-6|+(ab-4)^2=0$, 求 $-a^3b-2a^2b^2-ab^3$ 的值.

6. 用简便方法计算.

(1) $850^2-1700 \times 848+848^2$;

(2) $2998^2+2998 \times 4+4$.

• 数学思考

7. 如果 $9x^2+kxy+4y^2$ 是一个完全平方式, 那么 k 的值为_____.


8. 若 $a+\frac{1}{a}=3$, 则 $a^2+\frac{1}{a^2}$ 的值是_____.

9. 当 $m=$ _____时, $x^2+2(m-3)x+25$ 是完全平方式. 

10. 若 $m=2n+1$, 则 $m^2-4mn+4n^2$ 的值是_____.

• 解决问题

11. 已知正方形的面积是 $9x^2+6xy+y^2$ ($x>0, y>0$). 通过分解因式, 写出表示该正方形的边长的代数式_____.

12. 已知 $x^2+y^2-4x+6y+13=0$. 求 x 和 y 的值. 

• 数学活动

13. 试一试: 多项式 $(a-b)^2+4ab$ 能进行因式分解吗?

请你试着分解 $(x+y)^2-4(x+y-1)$.

• 开阔视野

14. 阅读下列文字与例题.

将一个多项式分组后, 再提公因式或运用公式继续分解的方法是分组分解法.

例:

$$\begin{aligned} & \textcircled{1} am+an+bm+bn \\ & = (am+bm)+(an+bn) \\ & = m(a+b)+n(a+b) \\ & = (a+b)(m+n) \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} x^2 - y^2 - 2y - 1$$

$$= x^2 - (y^2 + 2y + 1)$$

$$= x^2 - (y + 1)^2$$

$$= (x + y + 1)(x - y - 1)$$

(1) 试用上述方法分解因式.

$$\textcircled{1} a^2 - 2ab + ac - bc + b^2;$$

$$\textcircled{2} 9x^2 - y^2 - 4y - 4.$$

(2) 若 $(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 2) + 1 = 0$, 求 $x^2 + y^2$ 的值.

15. 试说明 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$ 是一个完全平方式.

方法一:

$$\text{原式} = [(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] + 1$$

$$= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1.$$

$$\text{令 } a = x^2 + 5x + 4, \text{ 则 } x^2 + 5x + 6 = a + 2.$$

$$\text{原式} = a(a+2) + 1 = (a+1)^2.$$

$$\text{即 } (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1 = (x^2 + 5x + 5)^2.$$

所以原命题成立.

方法二:

$$\text{原式} = (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1$$

$$= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 25$$

$$= (x^2 + 5x + 5)^2.$$

所以原命题成立.

即四个连续自然数的积再加上 1, 一定是一个完全平方数.

回顾与反思

• 知识点拨

本章研究的是因式分解, 因式分解与整式乘法是互为相反的过程. 因此运用整式乘法可以检验分解因式的结果是否正确.

初中阶段对某些多项式进行因式分解的方法有提公因式法和公式法(平方差公式、完全平方公式). 提公因式法是因式分解最基本的方法, 它实质上是单项式和多项式或多项式和多项式相乘的逆过程; 公式法是逆用整式的乘法公式.

• 知识与技能

1. 填空题.

$$(1) a^2b + ab^2 - ab = ab(\underline{\hspace{2cm}}).$$

$$(2) -7ab + 14a^2 - 49ab^2 = -7a(\underline{\hspace{2cm}}).$$

$$(3) a(x-1) + b(x-1) - c(1-x) = (x-1)(\underline{\hspace{2cm}}).$$

$$(4) -a^2 + b^2 = (a+b)(\underline{\hspace{2cm}}).$$

$$(5) 3 - 6x + 3x^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(6) 9(x-y)^2 - 6(y-x) + 1 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(7) x^2 + x + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}})^2.$$

2. 选择题.

(1)下列各式由左到右的变形中, 是因式分解的是 ()

- A. $a(x+y)=ax+ay$
- B. $x^2-4x+4=x(x-4)+4$
- C. $x^2-16+3x=(x-4)(x+4)+3x$
- D. $10x^2-5x=5x(2x-1)$

(2)下列分解因式错误的是 ()

- A. $1-16a^2=(1+4a)(1-4a)$
- B. $x^3-x=x(x^2-1)$
- C. $a^2-b^2c^2=(a+bc)(a-bc)$
- D. $m^2-0.01=(m+0.1)(m-0.1)$

(3)下列各式中, 能用提公因式法分解因式的是 ()

- A. x^2-y
- B. x^2+2x
- C. x^2+y^2
- D. x^2-xy+1

(4)多项式 $6x^3y^2-3x^2y^2-18x^2y^3$ 分解因式时, 应提取的公因式是 ()

- A. $3x^2y$
- B. $3xy^2$
- C. $3x^2y^2$
- D. $3x^3y^3$

(5)把多项式 x^3+x^2 提取公因式后, 剩下的因式是 ()

- A. $x+1$
- B. x^2
- C. x
- D. x^2+1

(6)非零实数 a, b 满足 $a^2+4b^2=4ab$, 则 $\frac{a}{b}$ 的值为 ()

- A. -2
- B. 2
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $-\frac{1}{2}$

(7)若 n 为任意整数, 且 $(n+11)^2-n^2$ 的值总可以被 k 整除, 则 k 等于 ()

- A. 11
- B. 22
- C. 11 或 22
- D. 11 的倍数

(8)不论 x, y 为任何实数, $x^2+y^2-4x-2y+8$ 的值总是 ()

- A. 正数
- B. 负数
- C. 非负数
- D. 非正数

3. 把下列各式分解因式.

(1) $-4x^3+16x^2+24x$;

(2) $8a(a-b)^2-12(b-a)^3$;

(3) $-a+2a^2-a^3$;

(4) $3(y-x)^2+2(x-y)$;

(5) $(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$;

(6) x^4-18x^2+81 ;

(7) $x(a-1)(a-2) - y(1-a)(2-a)$;

(8) $4(x+y)^2 - 9(2x-3y)^2$.

• 数学思考

4. 有三种卡片, 其中边长为 a 的正方形卡片 1 张, 长和宽分别为 a, b 的长方形卡片 6 张, 边长为 b 的正方形卡片 9 张, 用这 16 张卡片拼成一个无空隙的正方形, 则这个正方形的边长是_____.

5. 若 $m^2 + 2mn + 2n^2 - 6n + 9 = 0$, 则 $\frac{m}{n}$ 的值为_____.

6. 若 $a^2 + 2a + b^2 - 6b + 10 = 0$, 求 a, b 的值.

• 解决问题

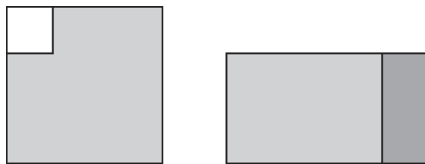
7. (1) 已知 $a-b=3$. 求 $a(a-2b)+b^2$ 的值.

(2) 已知 $ab=2, a+b=5$. 求 $a^3b+2a^2b^2+ab^3$ 的值.

• 数学活动

• 数学活动

8. 如图, 在边长为 a 的正方形中挖掉一个边长为 b 的小正方形 ($a > b$). 把余下的部分剪拼成一个矩形. 通过计算阴影部分的面积, 验证了一个等式, 这个等式是 ()



第 8 题

- A. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
 B. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 C. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 D. $a^2 - ab = a(a-b)$

9. 已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三边的长, 且 $b^2 + 2ab = c^2 + 2ac$. 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

• 开阔视野

10. 分解因式 $x^2 - 4x - 12$.

分析: 因为多项式 $x^2 - 4x - 12$ 中各项没有公因式, 显然也不是完全平方式, 对于这样 $x^2 + (a + b)x + ab$ 型的二次三项式的因式分解, 只要把常数项分解成两个因数的积, 而一次项系数正好等于这两个因数的和, 那么就可以把它分解成 $(x + a)(x + b)$ 的形式了.

因此, $x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$.

试用上述方法分解因式.

(1) $x^2 + 2x - 8$;

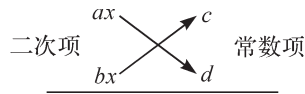
(2) $x^2 - 7x - 60$.

11. 分解因式 $3x^2 + 11x + 10$.

分析: 把二次项 $3x^2$ 分解成 x 与 $3x$ (二次项一般都只分解成正因数), 常数项 10 可分成 $1 \times 10 = -1 \times (-10) = 2 \times 5 = -2 \times (-5)$, 其中只有 $x \times 5 + 3x \times 2 = 11x$.

解: 原式 $= (x + 2)(3x + 5)$.

说明: 十字相乘法是某些二次三项式分解因式的一种常用方法, 分解时, 把二次项、常数项分别分解成两个单项式和两个数的积, 并使它们交叉相乘的积的和等于一次项. 需要注意的是: (1) 若常数项是正数, 则应把它分解成两个同号的因数. 若一次项为正, 则同为正号; 若一次项为负, 则同为负号. (2) 若常数项是负数, 则应把它分解成两个异号的因数, 交叉相乘所得的积中, 绝对值大的与一次项的符号相同 (若一次项是正, 则交叉相乘所得的积中, 绝对值大的就是正号; 若一次项是负, 则交叉相乘所得的积中, 绝对值大的就是负号).



$$adx + bcx = (ad + bc)x \quad \text{一次项}$$

$$abx^2 + (ad + bc)x + cd = (ax + c)(bx + d)$$

快动手试一试, 把 $2x^2 - 7x + 6$ 分解因式吧!

13. $1 < x < 2$ 14. $x \geq -\frac{1}{5}$ 15. 4

16. $m \leq 3$ 17. $-4 < a \leq -3$ 18. 1.3

三、解答题

19. (1) $x > -3$

(2) 不等式组的解集为 $-1 < x \leq 4$, 在数轴上表示略.

20. 解: 根据题意得 $\frac{3(2k+5)}{2} \leq 5k+1$, 解得 $k \geq \frac{13}{4}$, 所以 k 的取值范围为 $k \geq \frac{13}{4}$.

21. 解: (1) $(-2) \oplus 3 = -2 \times (-2-3) + 1 = -2 \times (-5) + 1 = 10 + 1 = 11$.

(2) $\because 3 \oplus x < 13$,

$\therefore 3(3-x) + 1 < 13$, 解得 $x > -1$.

在数轴上表示略.

22. 解: 设高中有 x 名学生参加, 初中有 $(x+4)$ 名学生参加.

根据题意得 $6x + 10(x+4) \leq 210$,

解得 $x \leq 10\frac{5}{8}$.

$\because x$ 为整数,

$\therefore x$ 最多为 10,

$\therefore 10+4=14$ (名).

答: 初中最多有 14 名学生参加, 高中最多有 10 名学生参加.

23. 解: (1) 设租用甲型号的挖掘机 x 台, 乙型号的挖掘机 y 台.

根据题意得 $\begin{cases} x+y=8, \\ 60x+80y=540, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=5, \\ y=3. \end{cases}$

答: 需要甲型挖掘机 5 台, 乙型挖掘机 3 台.

(2) 设租用甲型挖掘机 m 台, 则租用乙型挖掘机 $\frac{540-60m}{80}$ 台.

根据题意得 $100m + 120 \times \frac{540-60m}{80} \leq 850$,

解得 $m \leq 4$.

又 $\because m$ 为非负整数,

$\therefore m$ 可取 0 或 1 或 2 或 3 或 4.

将 m 的值分别代入 $\frac{540-60m}{80}$,

可知, 只有当 $m=1$ 时, $\frac{540-60m}{80}=6$, 为整

数, 符合题意.

所以符合条件的租用方案只有一种, 即租用甲型挖掘机 1 台, 乙型挖掘机 6 台.

第十一章 因式分解

11.1 因式分解

1. (1) 整式乘法 (2) 因式分解

(3) ① x^2-3x+2 ② $3x^2-6x$ ③ x^2-4x+4

④ $3x(x-2)$ ⑤ $(x-2)^2$

⑥ $(x-2)(x-1)$

(4) $a-2$

(5) $a-1$

(6) $m-4$

2. (1) C (2) D (3) C (4) A (5) B (6) D

(7) B (8) C (9) A

3. (1) 不正确, $x(x+1)(x-1)$

(2) 不正确, $(y+x)(y-x)$

(3) 不正确, $(x+y)(x-y)$

(4) 正确

(5) 不正确, $(x-3)^2$

(6) 正确

4. $m=-1, n=-2$

5. 0

6. 解: 能. $10^{12}-9 \times 10^{10} = 10^{10} \times (10^2-9) = 10^{10} \times 91$. 所以能被 91 整除.

7. 289π .

8. 解: 牛和蚊子的体重不会一样.

蚊子的证明错在:

由 $(a-b)^2 = (b-a)^2$,

得 $a-b = b-a$.

应该是 $a-b = \pm(b-a)$.

11.2 提公因式法

1. (1) ① a ② $3m$ ③ $2a^2$ ④ $5a$ ⑤ xy

⑥ $3x^2y$ ⑦ $4xy^2$ ⑧ $8pq^3$

(2) $a+b+c$ (3) a (4) -3

(5) 210 (6) 1

2. (1) A (2) A (3) C (4) C (5) C

3. (1) $8ab^2(1-2a^2b)$

(2) $-5x(3y+x)$

(3) $ab(a^2b^2+ab-1)$

(4) $-3am(a^2+2a-4)$

(5) $(x+y)(x+y+m)$

(6) $2(m+n)(3m+3n-1)$

(7) $2(p+q)(3p-2q)$

(8) $2(x-y)(3x+2y)$

(9) $(1-x)(2+x)$

(10) $(x-y)(3m-2x+2y)$

(11) $m(a-2)(m-1)$

(12) $(y-z)(2a-3b)$

(13) $4(x-y)^2(5y-2x)$

4. 0

5. 10; 21

6. A

7. $n^2+n=n(n+1)$

8. (1) $(a-b)(4a-3b)$

(2) $(m-n)^3$

(3) $(3x-1)(18x-7)$

9. (1) 9 900 (2) -31.4 (3) 1 999

10. -6

11. 解: 能. $3^{2\ 003}-4\times 3^{2\ 002}+10\times 3^{2\ 001}=3^{2\ 001}(3^2-4\times 3+10)=3^{2\ 001}\times 7$. 所以能被 7 整除.

12. C

分解过程: $a(x-y)+2b(y-x)$
 $= (x-y)(a-2b)$

13. 6

11.3 公式法(一)

1. (1) 可以, $(a+2b)(a-2b)$

(2) 不可以, 理由略

(3) 不可以, 理由略

(4) 可以, $(y+x)(y-x)$

(5) 可以, $(\frac{5}{7}+\frac{1}{2}x)(\frac{5}{7}-\frac{1}{2}x)$

2. (1) $(1+x)(1-x)$

(2) $(x+3)(x-3)$

(3) -400

(4) $(5x+7y)(5x-7y)$

(5) $(n+m)(n-m)$

(6) $(8x+9)(8x-9)$

(7) $(xy+z)(xy-z)$

(8) $(0.3x+\frac{1}{2}y)(0.3x-\frac{1}{2}y)$

(9) $(2a+b)(2a-b)$

(10) $\frac{1}{2}(mn+4)(mn-4)$

3. (1) 不正确, $x(x+y)(x-y)$

(2) 不正确, $x(x+2)(x-2)$

(3) 不正确, $2(2a+1)(2a-1)$

(4) 不正确, $x^2(x+5)(x-5)$

4. (1) $x(1+y)(1-y)$

(2) $(m+5)(m-5)$

(3) $2(a+2)(a-2)$

(4) $x^3(y+x)(y-x)$

(5) $a(3+b)(3-b)$

(6) $4a^2(x+2y)(x-2y)$

(7) $(a^2+1)(a+1)(a-1)$

(8) $3xy(3x+y)(3x-y)$

(9) $3m(2x-y+n)(2x-y-n)$

(10) $(2x+1)(2y-1)$

(11) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$

(12) $(a+4)(a-4)$

(13) $x^{m+1}(x+1)(x-1)$

(14) $(2+5x-5y)(2-5x+5y)$

(15) $4xy$

(16) $(7a-b)(a-7b)$

(17) $(x-y)(3x-3y+2)(3x-3y-2)$

5. 大正方形的边长为 32 cm, 小正方形的边长为 8 cm.

6. 4

7. (1) 45.8 (2) $9\ 999\frac{3}{4}$

8. $a=7, b=1$

9. C

10. $\frac{11}{20}$

11. $(a-1)^2(a+1)$

12. (1) 答案不唯一, 如 $11^2-9^2=8\times 5, 13^2-11^2=8\times 6$.

(2) 任意两个奇数的平方差等于 8 的倍数.

(3) 理由: 设 m, n 为整数, 两个奇数可表示为 $2m+1$ 和 $2n+1$, 则 $(2m+1)^2-(2n+1)^2=4(m-n)(m+n+1)$.

① 当 m, n 同是奇数或偶数时, $m-n$ 一定为偶数,

$\therefore 4(m-n)(m+n+1)$ 一定是 8 的倍数.

② 当 m, n 一个是奇数, 一个是偶数时, $m+n+1$ 一定为偶数,

$\therefore 4(m-n)(m+n+1)$ 一定是 8 的倍数.

综上所述, 任意两个奇数的平方差是 8 的倍数.

11.3 公式法(二)

- (1)① $(a-b)^2$ ② $(4x+3y)^2$ ③ $-(x-2y)^2$
④ $2(a-1)^2$ ⑤ $(1-\frac{1}{2}x)^2$
(2)1
- (1)D (2)D (3)C
- (1)能. $a=x; b=6$
(2)不能
(3)能. $a=x; b=y$
(4)不能
(5)能. $a=x; b=\frac{1}{2}$
(6)能. $a=\frac{1}{3}x; b=1$
- (1) $-(2a-1)^2$
(2) $y(x-2)^2$
(3) $3a(1+2a)^2$
(4) $(4-x+y)^2$
(5) $a^2b(a-3)^2$
(6) $-y(2x-3y)^2$
(7) $(a-b+6)^2$
(8) $n^2(\frac{m}{3}+n)^2$
(9) $(x+y)^2(x-y)^2$
(10) $-2ax^{n-1}(3x-1)^2$
(11) $(x-3)^2$
(12) $-a(a-\frac{1}{2}b)^2$
(13) $(x+3)^2(x-3)^2$
(14) $(x+1)^2(x-1)^2$
- 144
- (1)4 (2)9 000 000
- ± 12
- 7
- 8 或 -2
- 1
- $3x+y$
- $x=2, y=-3$
- 能. $(a+b)^2$
 $(x+y-2)^2$
- (1)① $(a-b)(a-b+c)$
② $(3x+y+2)(3x-y-2)$
(2)1

回顾与反思

- (1) $a+b-1$ (2) $b-2a+7b^2$
(3) $a+b+c$ (4) $b-a$
(5) $3(1-x)^2$ (6) $(3x-3y+1)^2$
(7) $\frac{1}{4}; x+\frac{1}{2}$
- (1)D (2)B (3)B (4)C (5)A
(6)B (7)A (8)A
- (1) $-4x(x^2-4x-6)$
(2) $4(a-b)^2(5a-3b)$
(3) $-a(1-a)^2$
(4) $(x-y)(3x-3y+2)$
(5) $(x+y)^2(x-y)^2$
(6) $(x+3)^2(x-3)^2$
(7) $(a-1)(a-2)(x-y)$
(8) $(8x-7y)(11y-4x)$
- $a+3b$
- $-\frac{1}{3}$
- $a=-1, b=3$
- (1)9 (2)50
- A
- 解: $\because b^2+2ab=c^2+2ac,$
 $\therefore b^2-c^2+2ab-2ac=0,$
即 $(b-c)(b+c+2a)=0,$
 $\therefore b-c=0$ 或 $b+c+2a=0.$
 $\because b+c+2a>0,$
 $\therefore b-c=0,$ 即 $b=c.$
 $\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形.
- (1) $(x+4)(x-2)$ (2) $(x-12)(x+5)$
- $(x-2)(2x-3)$

单元测试卷

一、选择题

1. B 2. A 3. C 4. C 5. D 6. D
7. C 8. A 9. D 10. A

二、填空题

11. $2ab$ 12. $6xy(x-1)^2$ 13. 5 14. 800
15. ± 22 16. -5 17. -7 18. 16 和 4

三、解答题

19. 解: (1) $-7ab(2c+1-7bc)$
(2) $y(x+9y)(x-9y)$