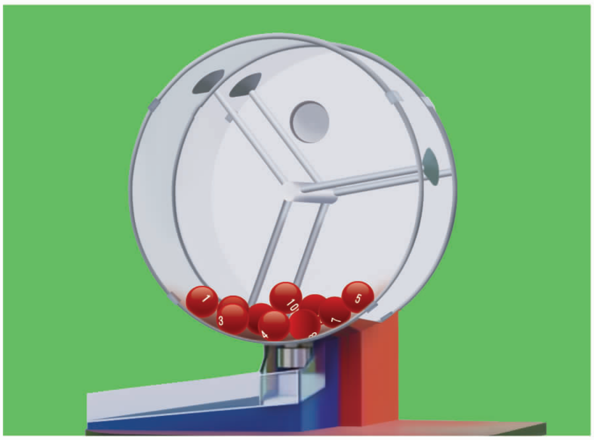
第三十一章

随机事件的概率

在本章中，我们将学习

- 随机事件及其概率
- 频率与概率的关系
- 用列举法计算简单事件的概率

如图，彩票号码摇奖器中，有10个质地、大小完全相同的球，分别标号为0，1，2，…，9. 摇奖器在转动的过程中，将有一个球从下方的洞中漏出. 你事先能确定这个球的号码吗？漏出球的号码有多少种可能结果？每个号码出现的可能性大小是否相同？



$P(A)=\frac{k}{n}$

31.1 确定事件和随机事件

在现实生活中，有些事情事先我们能知道它们一定发生或一定不发生，但对有些事情是否发生，我们事先不能作出肯定的回答，它们有时会发生，有时不会发生，发生与否具有随机性.

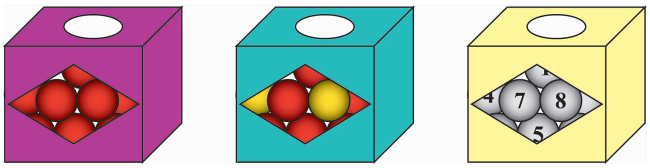
观察与思考

观察下列摸球试验，思考相应的问题.

试验 1：A 盒中有 10 个大小和质地都相同的红球，搅匀后从中任意摸出 1 个球. 事先能肯定摸到的是红球吗？能摸到黄球吗？

试验 2：B 盒中有 10 个大小和质地都相同的球，其中 6 个是红球，4 个是黄球，搅匀后从中任意摸出 1 个球. 事先能肯定摸到的是红球吗？能肯定摸到的是黄球吗？

试验 3：C 盒中有 10 个大小和质地都相同的球，分别标号为 0，1，…，9，搅匀后从中任意摸出 1 个球. 摸到球的号码有多少种可能结果？事先能肯定摸到球的号码是几吗？



A　　B　　C

在试验 1 中，由于 A 盒中全是红球，所以摸到的肯定是红球. 我们说“摸到红球”是必然发生的事情. 由于 A 盒中没有黄球，所以肯定不会摸到黄球，即“摸到黄球”是不可能发生的事情.

在试验 2 中，可能摸到红球，也可能摸到黄球，事先不能肯定摸到的是红球还是黄球. 我们说“摸到红球”和“摸到黄球”都是随机发生的事情.

在试验 3 中，标号为 0，1，…，9 的球都有可能被摸到，共有 10 种可能结果，但事先不能肯定哪种结果会发生.

在一定条件下，必然发生的事情叫做**必然事件**(certain event)，不可能发生的事情叫做**不可能事件**(impossible event)，可能发生也可能不发生的事情叫做**随机事件**(random event). 必然事件和不可能事件统称为确定事件.

例如，在试验 1 中，“摸到红球”是必然事件，“摸到黄球”是不可能事件，它们都是确定事件. 在试验 2 中，“摸到红球”和“摸到黄球”都是随机事件.

做一做

对于试验 3，指出下列事件中，哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随机事件.

(1) 摸到球的号码不超过 9.

(2) 摸到球的号码为 6.

(3) 摸到球的号码为 10.

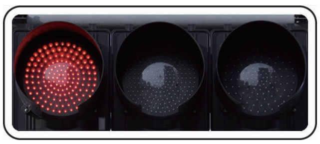
(4) 摸到球的号码为奇数.

为方便起见，一般用大写拉丁字母 A，B，C，…表示事件. 例如，在试验 3 中，可设 A= “摸到球的号码为奇数”，B= “摸到球的号码为偶数”，事件 A 和 B 都是随机事件.

在现实世界中，存在大量的随机事件，例如：

(1) 抛掷一枚硬币，硬币落地后，“正面朝上”和“反面朝上”都是随机事件.

正面　反面



(2) 上学路上，小明在某个有交通信号灯的路口“遇到红灯”是随机事件.

(3) 小亮拨打火车票订票电话，“线路占线”是随机事件.

(4) 从一批节能灯管中任意抽查一只，“使用寿命超过 3 000 h”是随机事件.

练　习

1. 指出下列事件中，哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随

机事件.

（1）在标准大气压下，水在 100 ℃时沸腾.

（2）向空中抛掷一个玻璃球，球落到地面.

（3）在没有氧气的密闭瓶子中，蜡烛能燃烧.

（4）解答有 4 个选项的单项选择题，随意猜一个答案，猜中正确答案.

（5）某射击运动员射击一次，成绩为 10 环.

2. 请你再举出几个随机事件的例子.

习 题

A 组

对于下列试验中的事件，分别指出哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随机事件.

（1）从 1，2，…，10 中任意选择两个数.

A＝“两个数的和是自然数”；B＝“两个数的和等于 21”；

C＝“两个数的比是整数”；D＝“两个数的积等于 15”.

（2）从装有 3 个红球，1 个黄球的盒子中任意取出 2 个球.

E＝“2 个球都是黄球”；

F＝“2 个球都是红球”；

G＝“2 个球中有红球”.

（3）形状相近的 5 把钥匙中只有 1 把能打开门.

H＝“任意摸出 1 把，打开了门”.

B 组

1. 一个袋子中装有 3 个红球，2 个黄球，1 个白球. 从中取球，判断下列事件是什么事件.

事件	判断	事件	判断
（1）任取 1 个球，恰是红球		（2）任取 1 个球，恰是黄球	
（3）任取 2 个球，全是黄球		（4）任取 2 个球，全是白球	
（5）任取 3 个球，其中有红球		（6）任取 4 个球，其中有红球	

2. 掷两颗骰子，请你针对掷的结果写出 1 个必然事件、1 个不可能事件和 4 个随机事件.

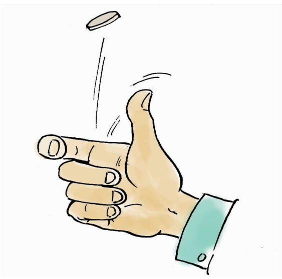
31.2 随机事件的概率

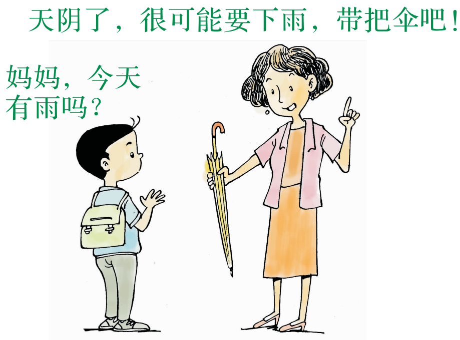
随机事件是否发生具有偶然性，但它们发生的可能性有大小之分. 如何用数值刻画随机事件发生的可能性大小呢?

大家谈谈

1. 在足球比赛时，通过掷硬币，以正、反面朝向来决定谁先挑边. 你认为这种方式公平吗?

2. “今天有雨”是必然事件还是随机事件? “很可能要下雨”是什么意思?

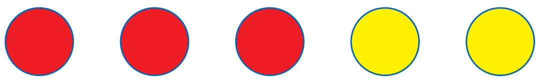




掷一枚质地均匀的硬币，落地后“正面朝上”和“反面朝上”都是随机事件，它们发生的可能性相同. “今天有雨”是随机事件，“很可能要下雨”是说事件“今天有雨”发生的可能性较大.

一起探究

袋子中有大小、质地完全相同的 5 个球，其中 3 个是红球，2 个是黄球. 从中任意摸出 1 个球，事件 A= “摸到红球”，B= “摸到黄球”.



（1）猜想：事件 A 和 B 发生的可能性大小相同吗?

（2）分组做摸球试验，每摸出 1 个球，记下球的颜色后放回袋子中，搅匀后再进行下一次摸球. 每组重复 20 次试验，记录事件 A 和 B 发生的次

数．汇总各组的摸球结果并填写下表(试验总次数不少于 200 次)：

事件	$A=$“摸到红球”	$B=$“摸到黄球”	合计
发生的次数			
占试验总次数的百分比			

(3) 事件 A 和 B 发生的次数占试验总次数百分比的大小有什么规律？

(4) 能用两个数分别刻画事件 A 和 B 发生的可能性大小吗？

做 n 次重复试验，如果事件 A 发生了 m 次，那么数 m 叫做事件 A 发生的**频数**(frequency)，比值 $\frac{m}{n}$ 叫做事件 A 发生的**频率**(relative frequency).

事件发生的频率，在某种程度上反映了事件发生的可能性大小.

在上面“一起探究”的摸球试验中，任意摸出 1 个球，有 5 种可能结果，摸到每个球的可能性大小相同，即摸到每个球具有等可能的结果，我们可以用 $\frac{1}{5}$ 来刻画摸到每个球的可能性大小．于是可以用 $\frac{3}{5}$ 来刻画摸到红球的可能性大小，用 $\frac{2}{5}$ 来刻画摸到黄球的可能性大小.

我们用一个数刻画随机事件 A 发生的可能性大小，这个数叫做事件 A 的**概率**(probability)，记作 $P(A)$.

如果一个试验有 n 种等可能的结果，事件 A 包含其中的 k 种结果，那么事件 A 发生的概率为 $P(A)=\frac{k}{n}$.

任何一个事件 A 都满足 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$．必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0.

例 1 有 10 张正面分别写有 1，2，…，10 的卡片，背面图案相同．将卡片背面朝上充分混匀后，从中随机抽取 1 张卡片，得到一个数．设 $A=$“得到的数是 5”，$B=$“得到的数是偶数”，$C=$“得到的数能被 3 整除”，求事件 A，B，C 发生的概率.

解：试验共有 10 种可能结果，每个数被抽到的可能性相等，则 A 包含 1 种可能结果，B 包含 5 种可能结果，C 包含 3 种可能结果.

所以

$$P(A)=\frac{1}{10},\ P(B)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\ P(C)=\frac{3}{10}.$$

练 习

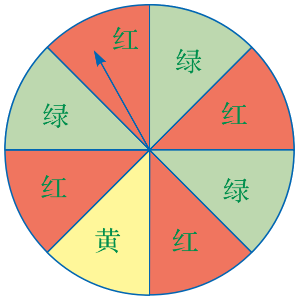
1. 袋子中装有 10 个球，它们除颜色外完全相同，其中 5 个是红球，3 个是黄球，2 个是白球. 从中任取 1 个球，设 $A=$ “取到红球”，$B=$ “取到黄球”，$C=$ “取到白球”. 求事件 A，B，C 发生的概率，并标在图中.

（第 1 题）

2. 如图，一个可以转动的圆盘，其中 8 个扇形的圆心角都相等.

（1）转动圆盘，等圆盘停下时，指针落在哪种颜色区域的可能性最大？请说明理由.

（2）分别求指针落在红色区域、绿色区域和黄色区域的概率.



（第 2 题）

习 题

A 组

1. 在一个设有交通信号灯的路口，红灯持续 40 s，绿灯持续 60 s，交替进行. 在这个路口，“遇到红灯”和“遇到绿灯”，哪个事件发生的可能性较大？

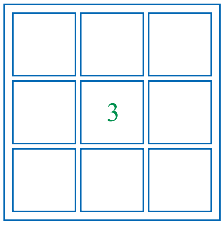
2. 从标有数字 1，2，…，8 的 8 张卡片中，任意抽取 1 张. 设 $A=$ “取到 2 的倍数”，$B=$ “取到 3 的倍数”.

   （1）事件 A 和 B 哪个发生的可能性大？

   （2）事件 A 和 B 的概率各是多大？

3. 一个袋子中有 20 个外形相同的球，其中 12 个是红球，8 个是白球. 从袋子中任意取出 1 个球，求取出的是红球的概率.

4. 扫雷游戏：如图所示，点击中间的按钮，出现数字 3，表明周围 8 个位置中有 3 颗地雷. 任意点击这 8 个按钮中的一个，碰上地雷的概率是多大？



（第 4 题）

5. 一副扑克牌共有 54 张，充分洗匀后从中任意抽取1 张. 设 $A=$ “抽到大王牌”，$B=$ “抽到黑桃牌”，$C=$ “抽到 K 牌”，$D=$ “抽到黑色的牌”. 将事件 A，B，C，

D 按发生的可能性大小从小到大排列为________________.

B 组

1. 将英文单词 MATHEMATICS(数学)的各字母写在 11 张卡片上，充分混匀后任取 1 张，求下列事件的概率.

(1) 取到字母 M.

(2) 取到字母 P.

(3) 取到元音字母.

2. 请你设计一个摸球试验，使“摸到红球”的概率为 $\frac{1}{2}$，“摸到白球”的概率为 $\frac{1}{3}$，“摸到黄球”的概率为 $\frac{1}{6}$.

小明和小亮做掷硬币游戏.

将一枚质地均匀的硬币投掷两次. 如果都是正面朝上，那么小明胜；如果一次正面朝上、一次反面朝上，那么小亮胜. 这个游戏公平吗?

甲同学的观点

掷两次硬币，有三种可能结果：“两次都是正面朝上”“一次正面朝上、一次反面朝上”“两次都是反面朝上”. 这三个事件的概率相等，都是 $\frac{1}{3}$. 游戏是公平的.

乙同学的观点

我做过掷两次硬币的试验，在 100 次重复试验中，“一次正面朝上、一次反面朝上”的频率明显比“两次都是正面朝上”的频率大. 我认为游戏不公平.

大家谈谈

1. 甲、乙两名同学发表了各自的观点，你同意谁的观点?
2. 怎样才算是一个公平的游戏?

实际上，在机会游戏中，对于两个事件 A 和 B，如果规定 A 发生，甲胜，B 发生，乙胜，那么当事件 A 和 B 的概率相等时，游戏是公平的. 否则，就不公平.

一起探究

如图 31 - 2 - 1，掷两次硬币.

(1) 有几种等可能的结果?

(2) P(两次正面朝上)=________；

P(一次正面朝上，一次反面朝上)=________；

P(两次反面朝上)=________.

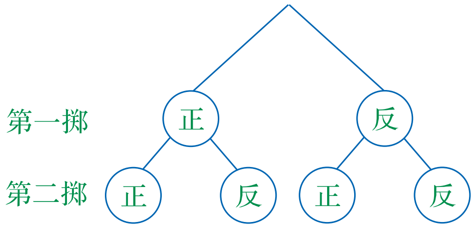


图 31 - 2 - 1

(3) 对于小明和小亮所做的掷硬币游戏，如果游戏不公平，怎样修改游戏规则，可使其成为一个公平的游戏?

做一做

甲、乙两个盒子中各装有三张分别标记 1，2，3 的卡片，分别从甲、乙两个盒子中随机抽取一张，记录上面的数，并用(m，n)表示“甲盒中抽取的卡片上的数为 m，乙盒中抽取的卡片上的数为 n”这一结果.

(1) 这样的“数对”共有多少种可能结果?

(2) 将所有这样的“数对”的可能结果及对应的两数之和填入下表：

可能结果									
两数的和									

(3) P(两数之和为奇数)=________，P(两数之和为偶数)=________.

例 2 一副扑克牌除去“大、小王”后共有 52 张，充分洗匀后从中任意抽取 1 张牌.

(1) 抽到红心牌的概率是多大?

(2) 抽到 A 牌的概率是多大?

(3) 抽到红色牌的概率是多大?

解：从 52 张扑克牌中任意抽取 1 张牌，共有 52 种等可能结果，其中抽到红心牌的结果有 13 种，抽到 A 牌的结果有 4 种，抽到红色牌(红心牌 13 张、方块牌 13 张)的结果有 26 种. 所以

$$P(\text{抽到红心牌})=\frac{13}{52}=\frac{1}{4},$$

$$P(\text{抽到 A 牌})=\frac{4}{52}=\frac{1}{13},$$

$$P(\text{抽到红色牌})=\frac{26}{52}=\frac{1}{2}.$$

练　习

1. 甲、乙两人做掷硬币游戏．掷一枚质地均匀的硬币，落地后，正面朝上，甲胜；反面朝上，乙胜．共掷了 10 次硬币，结果有 6 次正面朝上，4 次反面朝上．乙认为这个游戏不公平．你同意他的看法吗？请说说你的理由．

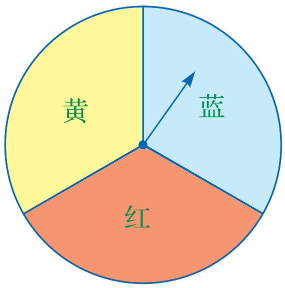
2. 如图所示的转盘，三个扇形的圆心角都相等，转动圆盘，等停下时观察指针停下的区域．

甲的观点：如果前 3 次指针都停在蓝色区域，下一次停在蓝色区域的概率会变大．

乙的观点：重复试验 3 次，一定会有一次停在蓝色区域．

丙的观点：指针停在红、黄、蓝三个区域的概率相等．

你认为谁的观点是正确的？



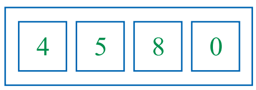
（第 2 题）

习　题

A　组

1. 足球比赛前，参赛的两队通过掷一枚硬币来挑边．如果正面朝上，那么甲队先开球或选择进攻方向；如果反面朝上，那么乙队先开球或选择进攻方向．这种挑边的方式公平吗？为什么？

2. 在猜一商品价格的游戏中，参与者事先不知道该商品的价格，主持人要求他从图中的 4 张卡片中任意拿走 1 张，使剩下的卡片从左到右连成一个三位数，



（第 2 题）

该数就是他猜的价格. 若商品的价格是 480 元，则参考者一次就能猜中的概率是________.

3. 掷一颗质地均匀的骰子，观察上面的点数. 设 $A=$ “点数为偶数”，$B=$ “点数为奇数”，$C=$ “点数能被 3 整除”，分别求事件 A，B，C 的概率.

4. 在一个有 40 人的班里，18 名女生中有 6 名共青团员，22 名男生中有 8 名共青团员. 随机选择 1 名学生，求下列事件的概率.

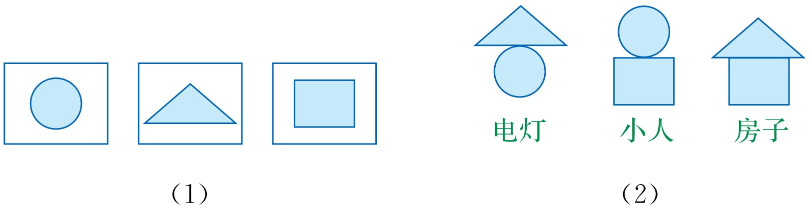
(1) 选到女生.

(2) 选到共青团员.

(3) 选到女共青团员.

B 组

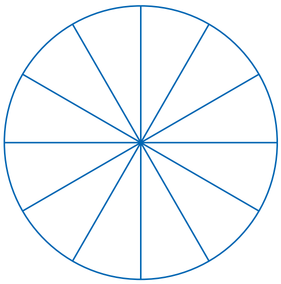
1. 甲和乙用 3 张同样规格的硬纸片做拼图游戏. 硬纸片正面如图（1）所示，背面完全一样. 将它们背面朝上混匀后，同时抽出 2 张. 游戏规则如下：如图（2），当两个图形可以拼成电灯或小人时，甲获胜；当两个图形可以拼成房子时，乙获胜. 你认为这个游戏规则公平吗？为什么？



（第 1 题）

2. 如图，一个圆被分成 12 个等圆心角的扇形，假设投一次飞镖一定命中圆内区域，而且命中每个扇形的可能性相等. 请你用红、黄、蓝三种颜色对某些扇形涂色，将这个圆设计成一个飞镖盘.

要求：投一次飞镖，命中红、黄、蓝区域的概率之比为 1∶2∶3.

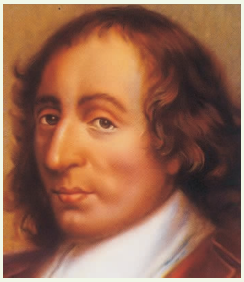


（第 2 题）

读一读

概率论的起源与发展

17 世纪中叶，有些人对博弈中的问题发生了争论，其中的一个问题是“赌金分配问题”. 他们决定请教法国数学家帕斯卡(Pascal)和费马(Fermat). 两位数学家对这个问题进行了认真的讨论，并最终解决了这个问题. 这个问题的解决直接推动了概率论的诞生.



帕斯卡(1623～1662)

费马(1601～1665)

类似“赌金分配问题”的一个例子如下：

甲、乙两名运动员进行乒乓球比赛，设立 600 元奖金，规定先胜 3 局的运动员将获得全部奖金. 两人实力相当，现已赛完 3 局，甲 2∶1 领先，此时比赛因故终止. 这 600 元奖金怎样分配才公平?

平均分配，甲不同意. 全部给甲，对乙不公平. 于是，有人提出了按已胜局数的比例分配的方案：甲得三分之二，400 元；乙得三分之一，200 元. 这个方案表面上看似公平，但真的公平吗?

设想继续比赛，第四局比赛甲胜或乙胜的概率各为 0.5. 如果甲胜，那么甲将先胜 3 局获得全部奖金；如果乙胜，那么需要进行第五局比赛，又各有 0.5 的获胜机会. 总之，若继续比赛，甲先胜 3 局的概率为 0.75，乙先胜 3 局的概率为 0.25. 因此奖金应按最终获胜概率的比例分配，甲得 450 元，乙得 150 元.

概率与统计的一些概念和简单方法，早期主要用于赌博和人口统计模型. 随着人类的社会实践，人们需要了解各种不确定现象中隐含的必然规律，并用数学方法研究各种结果出现的可能性大小，从而产生了概率论，并使之逐步发展成为一门严谨的学科. 现在，概率与统计的方法日益渗透到各个领域，并广泛应用于自然科学、经济学、医学、金融、保险甚至人文科学中.

31.3 用频率估计概率

对现实生活中的某些随机事件，需要做大量重复试验，用事件的频率去估计概率. 那么，频率和概率具有怎样的关系呢?

我们知道，掷一枚质地均匀的硬币，落地后，“正面朝上”和“反面朝上”的概率都是$\frac{1}{2}$.

五个小组分别掷一枚硬币 50 次和 500 次，统计“正面朝上”发生的频数和频率，结果如下表：

小组序号	$n=50$		$n=500$	
	频数	频率	频数	频率
1	22	0.44	251	0.502
2	25	0.50	249	0.498
3	21	0.42	256	0.512
4	27	0.54	246	0.492
5	24	0.48	251	0.502

将上面的试验结果用折线统计图表示，如图 31－3－1.

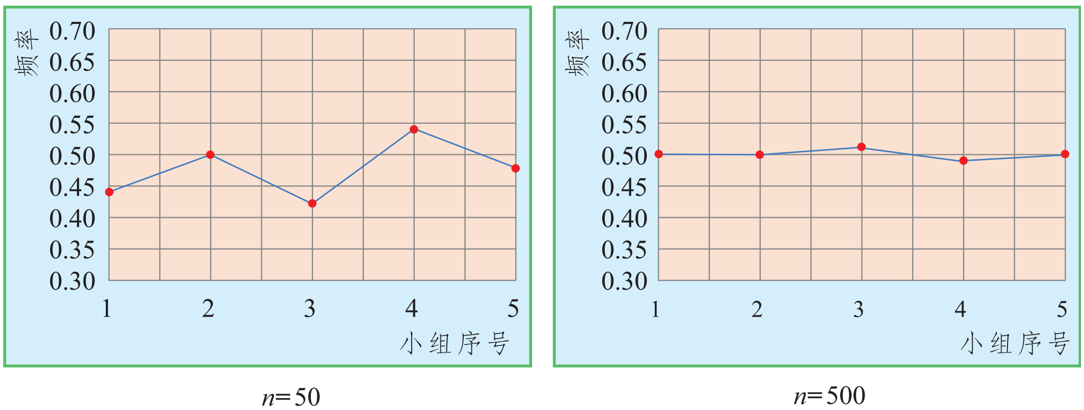


图 31－3－1

观察与思考

观察图 31-3-1，思考下列问题：

（1）当试验次数较小时，频率有什么特征？

（2）当试验次数很大时，频率有什么样的变化趋势？

实际上，对掷硬币试验，“正面朝上”的概率为 0.5，而频率则具有不确定性. 试验次数不同，频率可能不同；即使是相同次数的不同试验，频率也可能不同. 当试验次数较小时，频率的波动较大，但是随着试验次数的增大，“正面朝上”发生的频率波动明显减小，逐渐稳定到 0.5 附近. 这个性质叫做频率的稳定性.

做一做

1. 将全班分成 12 个小组，课外时间每个小组做 20 次掷硬币试验，记录事件 A= “正面朝上”发生的次数. 汇总各小组的试验结果，填写下表：

小组序号	1	2	3	4	5	6
A 发生次数						
小组序号	7	8	9	10	11	12
A 发生次数						

2. 整理上表中的数据，依次累计进行 20 次、40 次、…、240 次试验，记录事件 A 发生的次数，计算相应的频率，填写下表：

累计抛掷次数	20	40	60	80	100	120
A 发生次数						
A 发生的频率						
累计抛掷次数	140	160	180	200	220	240
A 发生次数						
A 发生的频率						

3. 在图 31－3－2 中画折线统计图，表示事件“正面朝上”发生的频率的变化趋势.

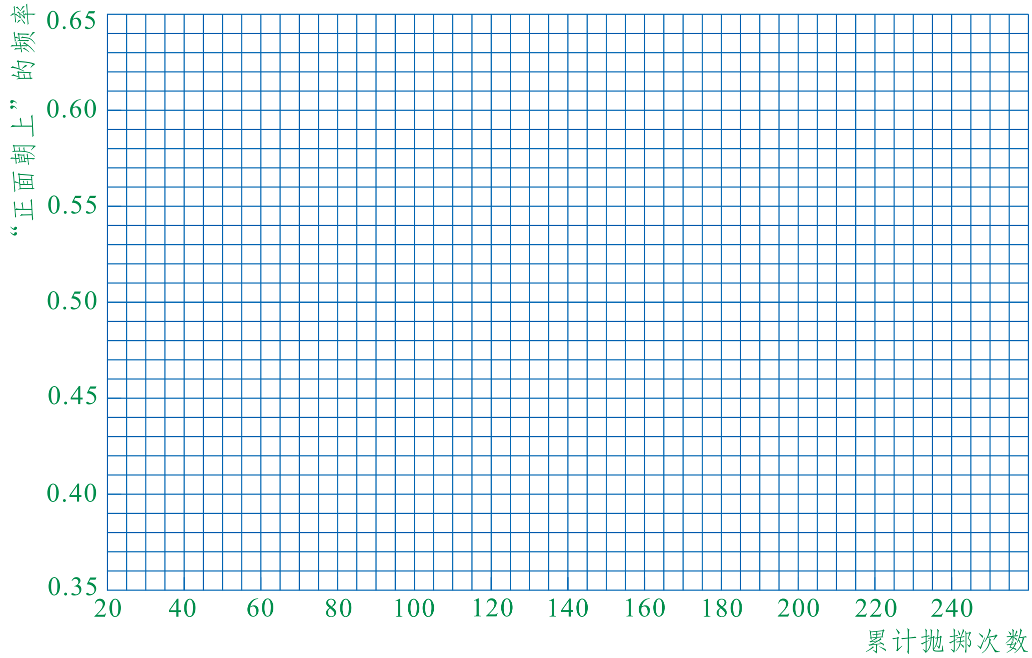


图 31－3－2

4. 观察上面的统计表与统计图，随着投掷次数的增加，事件“正面朝上”发生的频率是如何变化的？是否逐渐稳定到 0.5 附近？

练　习

关于掷一枚质地均匀硬币的试验，下列说法是否正确？为什么？

（1）“正面朝上”和“反面朝上”的概率都是 0.5，所以掷 100 次硬币一定是“正面朝上”和“反面朝上”各发生 50 次.

（2）结果是“正面朝上”还是“反面朝上”，全凭运气，没有什么规律.

习　题

A　组

1. 判断下列说法是否正确，在题后的括号内填写“正确”或“错误”.

（1）掷一枚质地均匀的硬币，“正面朝上”的概率为 0.5.　　（　　）

(2) 掷一枚质地均匀的硬币 10 次，“正面朝上”恰好发生 5 次. （　　）

(3) 掷一枚质地均匀的硬币 20 次，“正面朝上”发生的频率是 0.5.

（　　）

(4) 掷一枚质地均匀的硬币 1 000 次，“正面朝上”发生的频率接近 0.5.

（　　）

(5) 随着掷硬币次数的增大，“正面朝上”发生的频率逐渐稳定到 0.5.

（　　）

2. 掷一颗骰子，“掷出 6 点”的概率是多大？如果掷 6 次骰子，那么一定出现一个 6 点吗？如果做 600 次试验，那么“掷出 6 点”发生的频率应接近什么数？

3. 一种彩票中奖率为 1%(如 100 000 张中 1 000 张有奖)，购买 100 张彩票一定会中奖吗？购买 10 000 张这样的彩票，大约有多少张有奖？

B 组

将两个标号分别为 1 和 2 的乒乓球放入一个盒子中，先从中任意取出 1 个，记下号码后放回盒中，然后再取出 1 个记下号码. 两个号码之和可能为 2，3，4. 设事件 $A=$“和为 2”，$B=$“和为 3”，$C=$“和为 4”.

(1) 事件 A，B，C 的概率各是多大？

(2) 两名同学做了 150 次试验，获得的数据(两个号码的和)如下：

3434344323	4332324423	2233223344	4243232342	3243323333
4333433344	2422433423	3433423232	3233324433	3443343442
3433422333	3432343222	3232233443	4343433432	3343343432

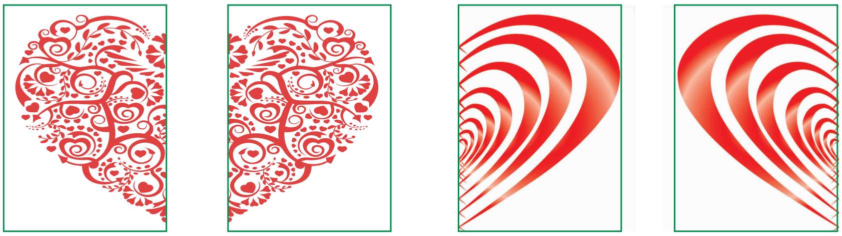
设计适当的表格，表示累计试验 10 次、30 次、50 次、…、150 次时，事件 A，B，C 发生的频率. 用折线统计图表示事件 A，B 发生的频率变化趋势.

(3) 随着试验次数的增大，事件发生的频率是否稳定到它的概率值附近？

对于掷硬币试验，当投掷次数很大时，“正面朝上”发生的频率逐渐稳定到 0.5，即频率稳定到概率. 对于其他的试验，事件发生的频率是否也具有稳定性呢？

如图 31－3－3，在 4 张图片中，(1)和(2)，(3)和(4)分别拼在一起时，

各为一个完整的心形图片．将 4 张图片背面向上，充分混匀后，从中依次任意取出 2 张，能拼成一个完整的心形图案算“成功”，否则算“失败”．



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

图 31－3－3

一起探究

1．凭直觉判断：事件“成功”和“失败”的概率相等吗？如果你认为不等，哪一个事件的概率较大？

2．做重复试验进行验证．两名同学做了 240 次试验，结果如下表：

试验次数	30	60	90	120	150	180	210	240
“成功”发生的次数	7	17	33	43	48	63	68	83
“成功”发生的频率	0.23							

计算事件“成功”发生的频率(结果精确到 0.01)，并在下面的网格图中，适当标记刻度，绘制折线统计图．

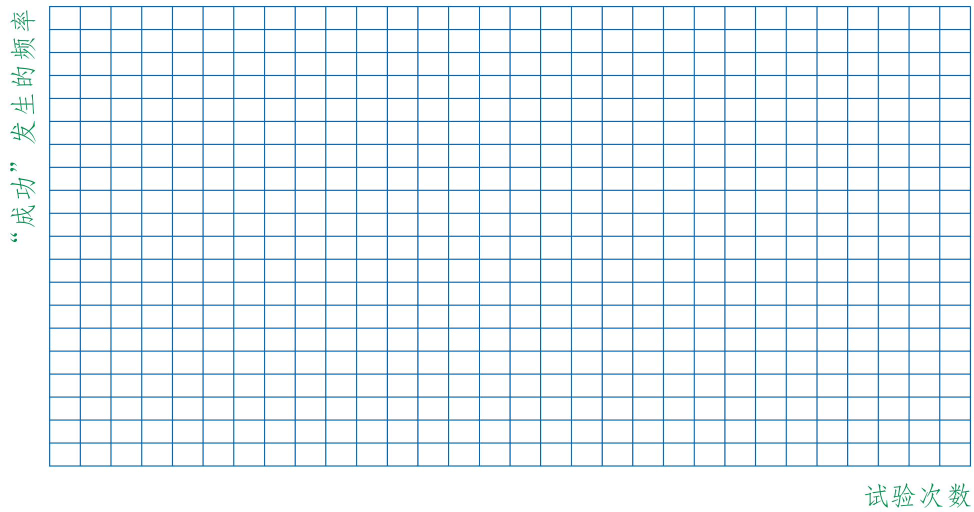


图 31－3－4

观察图 31－3－4，随着试验次数的增大，“成功”发生的频率是否趋于稳定？稳定在哪个数附近？

3. 直接计算“成功”和“失败”的概率.

从 4 张图片中依次任取 2 张，我们用(1，2)表示第一次取到(1)号图片、第二次取到(2)号图片的结果，依此类推，所有可能结果见下表：

第 2 张号码 / 第 1 张号码	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	×	(1，2)	(1，3)	(1，4)
(2)	(2，1)	×	(2，3)	(2，4)
(3)	(3，1)	(3，2)	×	(3，4)
(4)	(4，1)	(4，2)	(4，3)	×

试验的所有可能结果有________种，其中，只有________种能拼成一个完整的心形图案. “成功”的概率为________，“失败”的概率为________.

大量试验表明，随着试验次数的增大，事件发生的频率逐渐稳定到它的概率，或者说概率是频率的稳定值. 在实际中，我们常用比较稳定时的频率估计事件的概率，而试验次数越大，得到概率的较精确估计值的可能性越大.

概率反映了事件发生可能性大小的规律，这个规律是由大量重复试验呈现出来的. 所以在用频率估计概率时，需要做大量试验，这要花费大量的时间. 如果全班同学合作，每人做 10 次试验，把所得试验数据合起来，那么就相当于做了 400 次至 500 次试验，得到的频率值就较接近概率.

做一做

1. 某射击手射击 500 次，中靶 200 次. 估计该射击手的命中率.

2. 某运动员练习篮球投篮 200 次，命中 140 次. 投篮 1 次，命中的概率大约为多大？

练　习

1. 某种化妆品经销商随机访问了 4 名顾客，结果有 3 人使用 X 品牌的化妆品. 经销商宣称：“X 品牌化妆品的市场占有率为 75%.”这个结论可

信吗？为什么？

2. 某地区在 2009 年至 2013 年 5 年间，共出生婴儿 29 362 人，其中男婴 14 900 人. 据此分别估计该地区生男孩和生女孩的概率.

习 题

A 组

1. 为了解某电视节目的收视率，三家新闻单位分别进行了调查，结果如下表：

A 单位的调查结果			B 单位的调查结果			C 单位的调查结果		
调查人数	收看人数	收视率	调查人数	收看人数	收视率	调查人数	收看人数	收视率
100	30	30%	1000	256	25.6%	3 000	693	23.1%

你认为哪家新闻单位调查到的收视率可能更准确些？为什么？

2. 将一枚硬币的一面贴上号码 1，另一面贴上号码 2，掷硬币两次，观察掷出的两个号码的积. 设 $A=$ “积是 2”. 对 160 次试验数据进行整理的结果如下表：

试验次数	10	20	40	60	80	100	120	140	160
A 发生的次数	3	8	25	27	37	53	63	72	78
A 发生的频率									

(1) 用计算器计算 A 发生的频率，并填表.

(2) 根据表中数据绘制折线统计图.

(3) 随着试验次数的增大，频率稳定到什么数附近？

(4) 根据频率估计“积是 2”发生的概率.

(5) 直接计算“积是 1”“积是 2”和“积是 4”的概率.

B 组

准备 3 个乒乓球，分别标上号码 1，2，3，放入盒子中，按下列要求做摸球试验，并规定摸到 1 号球算“成功”.

(1) 甲、乙、丙三人按甲→乙→丙的固定顺序有放回地依次摸出 1 个球. 猜想甲、乙、丙“成功”的概率各是多大.

(2) 全班同学分为 10 组，每组按规定做 30 次重复试验，汇总全班的试验数据，计算“成功”发生的频率，验证你的猜想是否正确.

31.4 用列举法求简单事件的概率

如果一个随机试验只有有限个等可能的结果，我们可以利用图表，列举试验的所有可能结果及事件所包含的可能结果，直接计算事件的概率.

如图31－4－1，一个质地均匀的正四面体(四个面都是等边三角形)，四个面上分别标有数字1，2，3，4. 投掷这个正四面体，然后观察底面上的数字.

一起探究

1. 投掷一次，有多少种可能结果？它们发生的可能性相同吗，概率各是多大？

2. 投掷两次，共有多少种可能结果？如何表示这些可能结果？

3. 如何计算两数之和为2，3，…，8的概率？

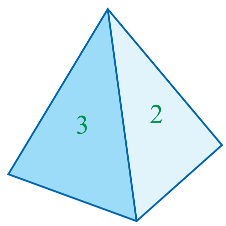


图31－4－1

投掷一次，有4种等可能的结果，它们发生的概率都是$\frac{1}{4}$.

投掷两次，有16(4×4)种等可能的结果，用$(m，n)$表示两次投掷的结果，其中m为第一次掷出的数，n为第二次掷出的数，m和n分别可能是1，2，3，4. 所有可能的结果以及对应的两个数的和可分别用下面的表格表示：

m \ n	1	2	3	4
1	(1，1)	(1，2)	(1，3)	(1，4)
2	(2，1)	(2，2)	(2，3)	(2，4)
3	(3，1)	(3，2)	(3，3)	(3，4)
4	(4，1)	(4，2)	(4，3)	(4，4)

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

从表中可以看出，投掷两次所发生的可能结果及对应的两个数的和. 如：投掷两次，事件“两数之和为 4”包含 3 种等可能的结果，分别是(1，3)，(2，2)，(3，1)，所以“两数之和为 4”的概率是$\frac{3}{16}$.

做一做

对投掷正四面体的试验，分别求出两数之和为 2，3，5，6，7，8 的概率，并填入下面的表格中.

两数之和	2	3	5	6	7	8
概率						

例 如图 31－4－2，四个开关按钮中有两个各控制一盏灯，另两个按钮控制一个发音装置. 当连续按对两个按钮点亮两盏灯时，“闯关成功”；而只要按错一个按钮，就会发出“闯关失败”的声音. 求“闯关成功”的概率.

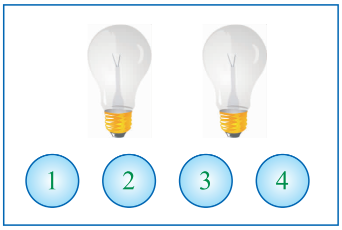


图 31－4－2

解：不妨设 1 号，2 号按钮各控制一盏灯，

连续按两个按钮(不考虑按钮的顺序)的所有可能结果列表如下：

按钮代号	12	13	14	23	24	34
结果	成功	失败	失败	失败	失败	失败

所有可能结果有 6 种，它们都是等可能发生的，而其中只有一种结果为“闯关成功”，所以，P(闯关成功)$=\frac{1}{6}$.

练　习

对本节“一起探究”投掷正四面体的试验，求下列事件的概率.

$A=$“两数之和为偶数”.

$B=$“两数之和为奇数”.

$C=$“两数之和大于 5”.

$D=$“两数之和为 3 的倍数”.

习 题

A 组

1. 将四个面分别标有 1，2，3，4 的正四面体连续投掷两次，用两次投掷底面上的数字按投掷顺序组成一个两位数(第一次掷出的数为十位数，第二次掷出的数为个位数)，求下列事件的概率.

   (1) 这个两位数是偶数.

   (2) 这个两位数是奇数.

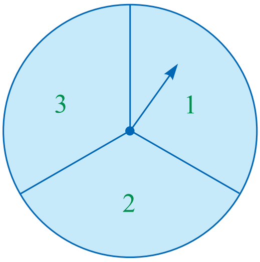
   (3) 这个两位数的个位数和十位数相同.

2. 如图，将一个圆盘等分成三个扇形，分别标上数字 1，2，3，指针不动，转动圆盘两次，等圆盘停下时，由指针指向区域各得到一个数，把这两个数组成一个数对 (m, n).

   (1) 用表格表示所有可能结果.

   (2) 分别求两数的和是 2，3，4，5，6 的概率.

   (3) 分别求两数之和为偶数和奇数的概率.



(第 2 题)

3. “锤子、剪刀、布”是一个古老的儿童游戏，三种不同手势分别代表锤子、剪刀和布. 规则是：锤子胜剪刀，剪刀胜布，布胜锤子；当两人做出相同的手势时，不能决定胜负. 设甲、乙两人都等可能地采用三种手势.

   (1) 求一个回合不能决定胜负的概率.

   (2) 分别求甲、乙获胜的概率.

   (3) 用这种方式决定胜负公平吗？

乙 / 甲			
	平	甲胜	乙胜
	乙胜	平	甲胜
	甲胜	乙胜	平

(第 3 题)

B 组

1. 在本节例题的闯关游戏中，如果四个开关按钮中有三个各控制一盏灯，连续按三个按钮，能点亮三盏灯的概率是多大？

2. 袋子中有 3 个红球，2 个黄球. 甲先从中任取 1 个球，取后不放回，乙再从中任取 1 个球. 用表格列举试验结果，分别求下列事件的概率.

   (1) 甲取到红球.

   (2) 乙取到红球.

   (3) 两人都取到红球.

在一次知识竞赛中，有三名同学都答对了，但奖品只有一份，谁应该得到这份奖品呢？他们决定用抽签的方式来确定.

取 3 张大小相同，分别标有数字 1，2，3 的卡片，充分混匀后扣到桌子上，按甲、乙、丙的顺序，每人从中任意抽取 1 张(取后不放回)，规定抽到 1 号卡片的人中奖. 中奖的概率和抽签的顺序有关吗？

大家谈谈

下面是三名同学的看法，你同意谁的观点？请说出你的理由.

小明的看法

先下手为强，如果我先抽到 1 号卡片，后面的人就没有机会了.

小亮的看法

后发制人，如果前面的人都没有抽中，机会就全是我的了.

小红的看法

中奖的机会是一样的，与抽签的顺序无关.

我们首先来描述三人按先后顺序抽签的所有可能结果.

用“123”表示甲抽到 1 号卡片、乙抽到 2 号卡片、丙抽到 3 号卡片的结果，依此类推.

甲抽取时有 3 种可能，乙抽取时有 2 种可能，丙抽取时只有 1 种可能. 用图形表示可能结果，如图 31 - 4 - 3.

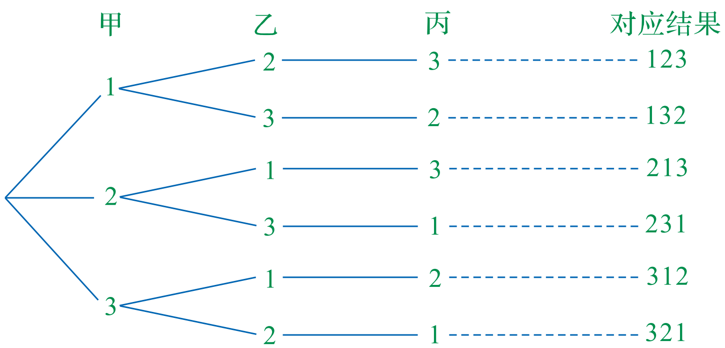


图 31 - 4 - 3

还可以用如下的表格列举试验的可能结果.

甲	1	1	2	2	3	3
乙	2	3	1	3	1	2
丙	3	2	3	1	2	1

容易看出，三个人依次抽签，有 6 种等可能的结果，而甲、乙、丙抽到 1 号卡片各有 2 种可能结果，所以甲、乙、丙中奖的概率都是$\frac{1}{3}$.

如果三个人参加抽签，但有两份奖品，规定抽到 1 号或 2 号卡片都可以中奖，则甲、乙、丙中奖的概率都是$\frac{2}{3}$.

事实上，抽签不分先后顺序，每个人中奖的概率都相等.

做一做

如图 31－4－4，一木板上均匀地钉有几排钉子，将一小球从顶端放入，小球碰到钉子后等可能地向左或向右落下，最后落入下面的格子中.

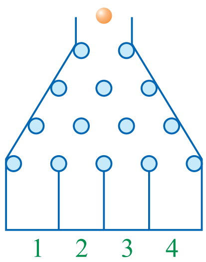


图 31－4－4

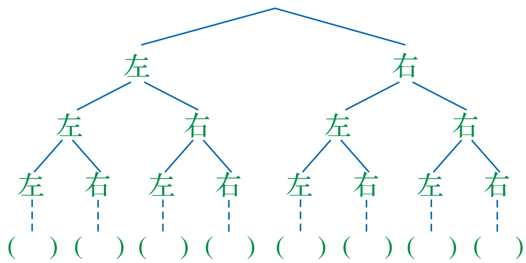


图 31－4－5

(1) 图 31－4－5 表示小球下落的所有可能路径. 对应每条路径，将小球最后落入格子的号码填写在图下方的括号内.

(2) 计算小球最后落入 1 号、2 号、3 号、4 号格子中的概率.

像图 31－4－3 和图 31－4－5 这样的图形，叫做**树形图**(tree diagram). 树形图可以清楚地表示试验结果. 在同一层，如果从每个节点等可能地分出数目相同的分支，那么整个树形图的所有分支数目就是试验的可能结果个数，而且这些结果都是等可能的.

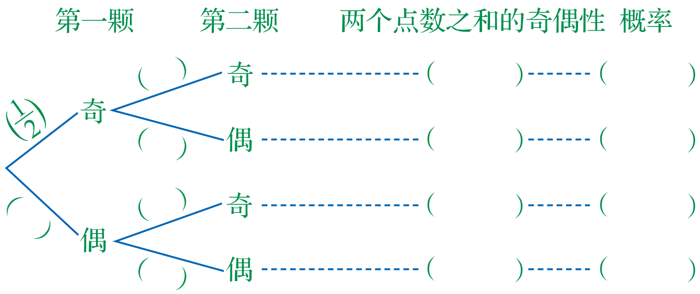
练　习

掷两颗骰子，得到两个点数，计算两个点数之和.

(1) 在树形图的括号内填写适当的数或结果.

(2) 判断树形图的 4 个分支对应的事件是否等可能.

(3) 分别求“点数之和为奇数”和“点数之和为偶数”的概率.

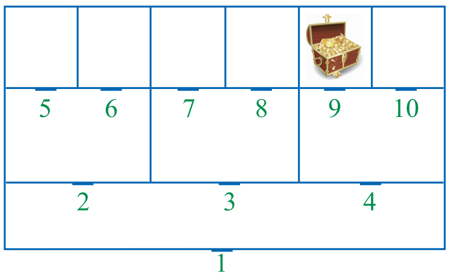


习 题

A 组

1. 小红有红色、黄色、白色三件衬衣，有红色和蓝色两条裙子，任取一件上衣，并任取一条裙子，求它们恰好都是红色的概率.

2. 如图，在上排六个房间中的某个房间内放有一个存宝箱，1～10 各是一扇可以打开的门. 假如你事先不知道存宝箱在哪里，从 1 号门进入后，只允许再打开两扇门，则能找到存宝箱的概率是多大?



(第 2 题)

3. 从 1，2，3，4 四个数字中任取两个，按顺序组成没有重复数字的两位数，求组成的两位数是偶数的概率.

B 组

1. 掷 3 枚质地均匀的硬币，求下列事件的概率.

   (1) 3 枚全是反面向上.

   (2) 2 枚正面向上，1 枚反面向上.

2. 甲、乙、丙三名同学做传球练习，先由甲等可能地将球传给乙或丙，每人接到球后又等可能地传给其他两人. 画树形图，求三次传球后球分别在甲、乙、丙手中的概率.

数学活动

蒲丰投针试验

1777 年，法国科学家蒲丰(Buffon，1707～1788)提出了一个著名的问题：在平面上画一些平行线，相邻两条平行线之间的距离都是 a，向这个平面上任意投一长度为 l ($l<a$) 的针，那么针与任一平行线相交的概率是多大？

活动一：做类似的试验.

在平整的地面上用粉笔画一些平行线，相邻两条平行线之间的距离都是 a ($a=30$ cm)，将一根长为 l ($l=25$ cm) 的筷子投向平行线所在的区域，观察筷子和平行线是否相交. 记事件 $A=$ “筷子与平行线相交”.

分 8 个小组做投筷子试验，每个小组做 100 次重复试验，记录事件 A 发生的次数，计算事件 A 发生的频率，将结果填入下表.

小组编号	1	2	3	4	5	6	7	8	合计
投掷次数									
A 发生的次数									
A 发生的频率									

活动二：比较结果.

(1) 经理论计算，可知 $P(A)=\dfrac{2l}{\pi a}$. 将 $a=30$ cm，$l=25$ cm 代入公式中，计算事件 A 的概率 $P(A)$.

(2) 用上面每组得到的频率值估计事件 A 的概率，看看它们与 $P(A)$ 的误差分别是多大.

(3) 汇总各组试验结果，看看 800 次重复试验得到的频率是否与 $P(A)$ 更接近些.

活动三：求 π 的近似值.

筷子与平行线相交的概率与圆周率 π 有关，用频率作为概率的近似值，借助 $P(A)=\dfrac{2l}{\pi a}$，就可以求得 π 的近似值. 根据 800 次试验的结果，求 π 的近似值.

回顾与反思

一、知识结构

随机事件 → 事件的概率 → 合理决策

事件的概率：

- 在等可能的条件下，用列举法求事件的概率
- 通过做重复试验，用稳定时的频率估计事件的概率

二、总结与反思

大千世界中充满了不确定性，偶然中蕴含着必然规律．概率是研究随机现象规律性的学科．

1．在随机试验中，可能发生也可能不发生的事情叫做随机事件．随机事件的发生具有偶然性，但在大量重复试验中，却呈现出确定的规律．用一个数值描述事件发生的可能性大小，这个数值就叫做事件的概率．

2．如果一个试验只有有限个等可能的结果，我们可以直接计算相关事件的概率．利用表格、树形图列举试验的可能结果，可帮助我们计算概率．

3．对于大量的随机事件，需要通过重复试验，用频率估计概率．频率具有稳定性，即当试验次数逐渐增加时，事件发生的频率逐渐稳定到一个常数附近，这个数就是事件的概率，或者说概率是频率的稳定值．用频率估计概率，得到的只是一个近似值．试验次数越大，得到较准确的估计值的可能性也越大．

4．（1）举例说明什么是随机事件．

（2）事件的频率和概率的关系是什么，主要区别在哪里？

（3）计算事件的概率的一般步骤是什么？

（4）举例说明概率在实际中的简单应用．

三、注意事项

在计算简单事件的概率时，要注意试验的所有可能结果是不是等可能的．

在随机试验中，经常用到的“随机抽取”“质地均匀”等词汇，都是为了保证试验结果的等可能性．

复　习　题

A　组

1. 一个袋子中有 2 个红球，1 个黄球，从中任意取出 2 个球. 在下列事件中，哪些是必然事件，哪些是不可能事件，哪些是随机事件？

   A＝“两球都是黄球”；B＝“两球都是红球”；C＝“一个红球一个黄球”.

2. 下列说法正确吗？请说明理由.

   (1) 必然事件是发生的可能性很大的事情.

   (2) 不可能事件是几乎不可能发生的事情.

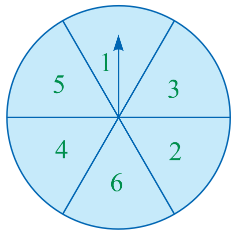
   (3) 如果一个事件发生的机会达到 99.99%，那么它就是必然事件.

   (4) 如果一个事件发生的机会只有百万分之一，那么它就是不可能事件.

3. 如图是一个可以转动的圆盘(指针固定不动)，六个扇形的圆心角相等. 转动圆盘，等它停止后，指针指向几就按顺时针方向走几格，得到一个数字.

   (1) 分别求得到数字为偶数和奇数的概率.

   (2) 请修改圆盘中的数字，使“得到偶数”与“得到奇数”具有相同的概率.



(第 3 题)

4. 有两个游戏，如果第一个游戏你获胜的概率为 0.8，第二个游戏你获胜的概率为 0.3，那么做第一个游戏你一定能赢吗，做第二个游戏你一定会输吗？

5. 从 10 到 99 这 90 个数中任意选取 1 个数. 求下列事件的概率.

   A＝“取到的是一位数”；　　B＝“取到的是两位数”；

   C＝“取到的是 2 的倍数”；　D＝“取到的是 5 的倍数”.

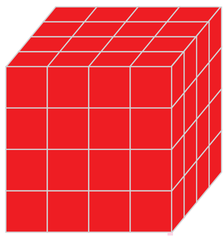
6. 把一个正方体木块的表面涂上红色，将该正方体木块分割成 64 个大小相同的小正方体，再将这些小正方体均匀地混合在一起，然后从中任意取出 1 个. 求下列事件的概率.

   (1) 取到的小正方体各面都没有红色.

   (2) 取到的小正方体一面有红色.

   (3) 取到的小正方体两面有红色.

   (4) 取到的小正方体三面有红色.


(第 6 题)

7. 两组标有字母的卡片各 7 张. 第一组标的字母分别为 C, H, I, N, E, S, E; 第二组标的字母分别为 E, N, G, L, I, S, H. 从两组卡片中各任取 1 张, 得到两个字母.

(1) 求两个字母相同的概率.

(2) 求两个字母都是元音字母的概率.

B 组

1. 从你所在班里任选一名同学当值日组长.

(1) 采用什么办法才能保证每名同学都有同样的机会被选到?

(2) 小明说, 任选一名同学, 选到的不是男生就是女生, 所以"选到男生"和"选到女生"的概率各是$\frac{1}{2}$. 你同意这个说法吗? 为什么?

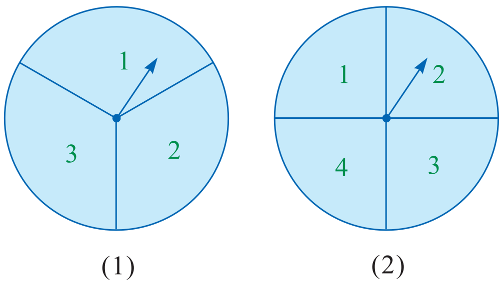
2. 为了估计一批产品的次品率, 小明任意抽查了 10 件产品, 发现有 1 件次品, 他估计次品率为 10%. 小刚任意抽查了 100 件产品, 发现有 4 件次品, 他估计次品率为 4%. 哪个结果更可信? 为什么?

3. 甲、乙两个工厂生产同一型号的家用电器, 甲厂产品的合格率为 95%, 乙厂产品的合格率为 99%. 如果价格和其他方面都相同, 你愿意购买哪个工厂的产品? 为什么?

4. 从长分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的六条线段中任意选择三条, 事件 A 表示"这三条线段能构成三角形". 计算事件 A 的概率.

5. 对四选一的选择题, 即使不会解题, 完全凭猜也有$\frac{1}{4}$的概率得到正确答案. 为了防止乱猜, 现制订评分标准为: 答案正确得 3 分, 答案错误扣 1 分(得 −1 分). 做 100 道选择题, 完全凭猜测, 大约能得多少分?

6. 如图是两个可以转动的圆盘(指针固定不动, 两圆中扇形的圆心角分别相等), 同时转动两个圆盘, 等它们停下时, 圆盘(1)和(2)上的指针分别指向一个数. 设 A= "两数之和为奇数", B= "两数之和为偶数". 画树形图求事件 A 和 B 的概率.



(第 6 题)

C 组

1. 小明和小强玩一种游戏：从装有 3 个红球和 1 个黄球的袋子中，任意摸出一个球. 如果摸到黄球，小明得 4 分；如果摸到红球，小强得 1 分.

(1) 你认为这个游戏公平吗？为什么？

(2) 假设玩这个游戏 400 次，小明大约可得多少分，小强大约可得多少分？

(3) 如果你认为游戏不公平，那么怎样修改得分标准才公平？

2. 和同学合作，做抛掷图钉的试验，分别抛掷 10 次、20 次、…、200 次图钉，记录每一次试验中钉尖触地的次数，计算“钉尖触地”发生的频率，画折线统计图表示频率的变化情况.

试验次数	10	20	40	80	120	160	200
钉尖触地次数							
钉尖触地频率							

随着试验次数的增加，“钉尖触地”发生的频率是否趋于稳定？如果稳定，稳定到什么数附近？由此估计“钉尖触地”的概率.