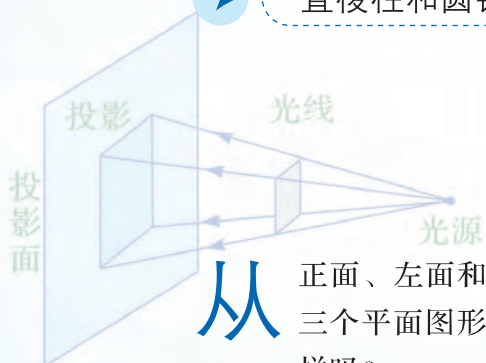


第三十二章

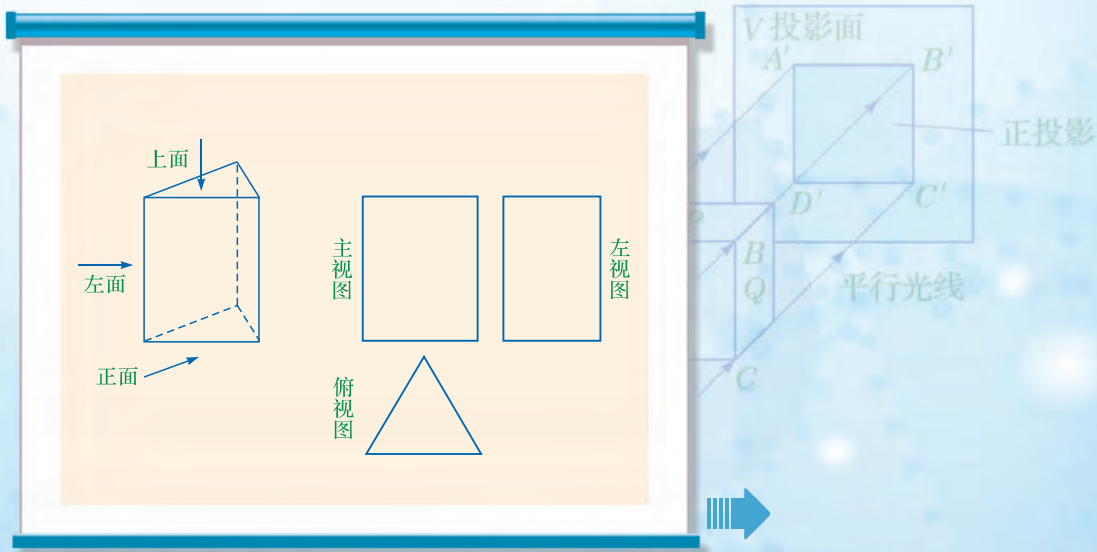
投影与视图

在本章中，我们将学习

- 投影
- 视图
- 直棱柱和圆锥的侧面展开图



从正面、左面和上面三个方向观察这个几何体，得到三个平面图形。你观察到的平面图形和这些图形一样吗？



32.1 投 影

物体在光线的照射下，会在投影面上形成投影. 物体的投影具有怎样的特征呢?

物体在光线的照射下会形成影子.



灯光下手的影子



烛光下笔的影子



阳光下日晷晷针的影子



探照灯下人物的影子

物体在光线的照射下，会在某个平面(墙面、地面等所在的平面)上留下它的影子，这种现象就是投影. 光线是投影线，这个平面是投影面.

蜡烛和灯泡的光线可以看做是从一点射出的. 像这样，由一点射出的光线照射在物体上所形成的投影，叫做**中心投影**(central projection).

太阳光线和探照灯的光线可以看做是平行的. 像这样，由平行光线照射在物体上所形成的投影，叫做**平行投影**(parallel projection).



大家谈谈

1. 如图 32-1-1，观察正方形的中心投影. 当投影面和物体的摆放位置不变时，光源距物体的远近与物体投影的大小有什么关系?

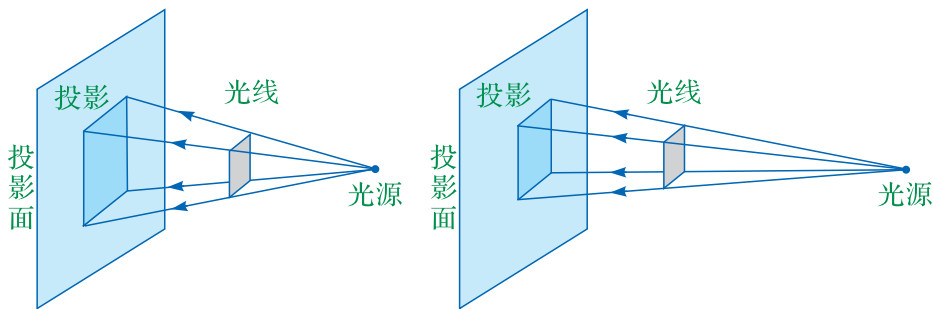


图 32-1-1

2. 当投影面和光源的位置不变时, 物体的摆放位置与它的投影形状有什么关系?

一起探究

- 如图 32-1-2, 一束平行光线倾斜地照射在地面(投影面)上.
 - 立于地面上点 A 处的旗杆的高度与它投影的长短有什么关系?
 - 请你分别画出小明站在点 B 处和点 C 处时的投影(用线段表示), 并比较他在这两处投影的长短.
 - 旗杆高与它投影长的比, 小明身高与他投影长的比, 二者之间有什么关系?

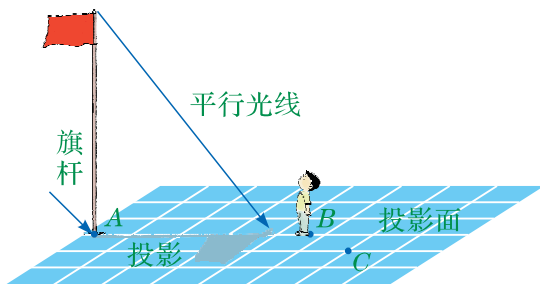


图 32-1-2

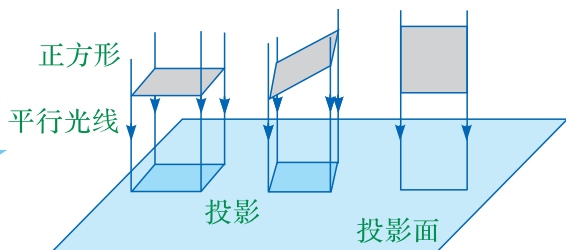


图 32-1-3

- 如图 32-1-3, 一束平行光线垂直地照射在地面(投影面)上.
 - 正方形纸片摆放位置距离地面的远近与它投影的形状有没有关系?
 - 当正方形纸片水平放置、倾斜放置和竖立放置时, 分别说出它的投影的形状.

平行投影又分为两种形式, 一种为投影线倾斜于投影面, 一种为投影线垂直于投影面. 我们把投影线垂直照射在投影面上的物体的投影叫做**正投影**(orthographic projection). 图 32-1-3 中, 正方形纸片的投影都是正投影.

观察与思考

如图 32-1-4, 已知正方体的 R 面与投影面是平行的, 它在投影面上的正投影是四边形 $A'B'C'D'$.

(1) 四边形 $A'B'C'D'$ 是什么四边形? 正方体 R 面对面的正投影是什么图形?

(2) 正方体 Q 面和 P 面的正投影分别是什么图形?

(3) 正方体棱 AB 和棱 AE 的正投影分别是什么图形? 正方体顶点 A 和顶点 E 的正投影分别是什么图形?

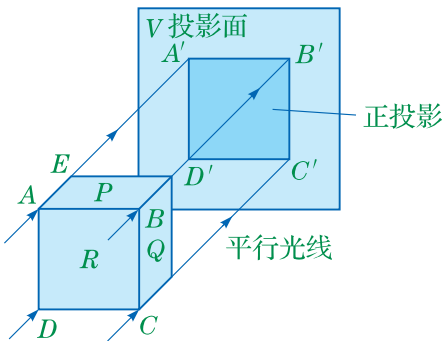
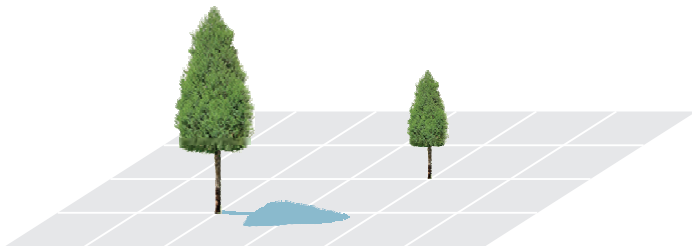


图 32-1-4

练习

1. 如图, 根据大树在阳光下的投影, 画出另一棵小树的投影(用线段表示).



(第 1 题)



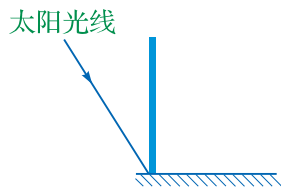
(第 2 题)

2. 如图, 小明站在路灯下, 以路灯为点光源, 请画出小明(抽象为线段)在地面上的中心投影(用线段表示).

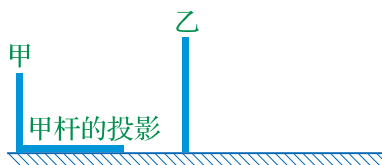
习题

A 组

1. 如图, 请画出一根直立于地面的标杆的投影(用线段表示).

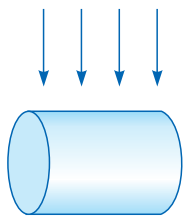


(第 1 题)



(第 2 题)

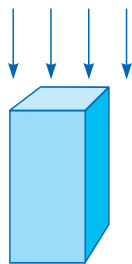
2. 如图, 请根据甲杆在阳光下的投影, 画出乙杆的投影(用线段表示).
3. 请根据图中给出的投影线, 画出圆柱的正投影.



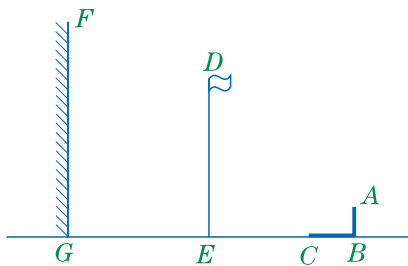
(第 3 题)

B 组

1. 按照图中给出的投影线, 画出上、下底面都是正方形的长方体的正投影.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 如图, 小明和他在阳光下的影子分别以线段 AB , BC 表示, 旗杆和墙分别以线段 DE , FG 表示.
 - (1) 请在图中画出旗杆在同一时刻阳光照射下的影子.
 - (2) 如果 $AB=1.6$ m, $BC=2.4$ m, $DE=15$ m, 旗杆与墙的距离 $EG=17.7$ m, 那么旗杆的影子落在墙上的长度是多少米?

32.2 视图

在工程设计中，立体图形的形状往往是以平面图形来刻画的。借助正投影，可实现立体图形和平面图形之间的相互转化。

观察与思考

1. 如图 32-2-1，左边几何体的正投影(1)，(2)，(3)分别是从小何体的哪个方向上得到的？

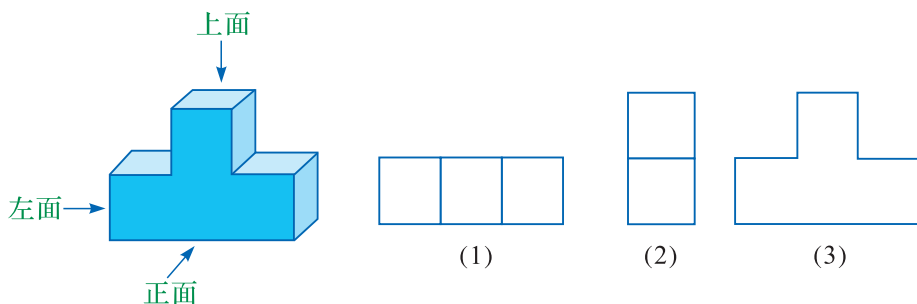


图 32-2-1

2. 如图 32-2-2，对于给出的几何体，思考并回答下列问题：

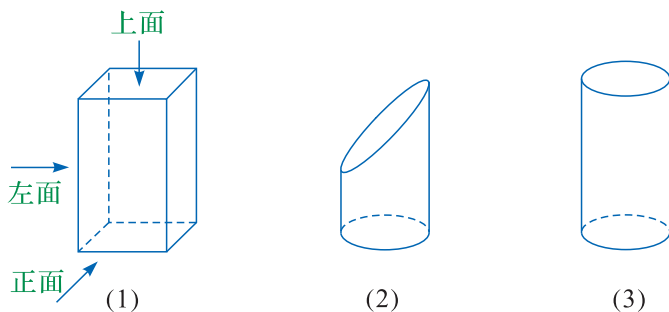


图 32-2-2

(1) 对于(2)，(3)这两个几何体，只从它们上面的正投影，我们能确定这两个几何体的形状吗？

(2) 对于(1)，(3)这两个几何体，只从它们正面和左面的正投影，我们能确定这两个几何体的形状吗？

(3) 对于这三个几何体，分别从它们的正面、左面和上面的正投影，我

们能确定这三个几何体的形状吗?

一般地,用几何体的正面、左面和上面三个不同方向上的正投影,就可以刻画出这个几何体的形状与大小了.

一个几何体的正投影,又叫做这个几何体的**视图**.从正面得到的视图叫做**主视图**,从上面得到的视图叫做**俯视图**,从左面得到的视图叫做**左视图**.

下面,我们约定面对几何体的一面为几何体的正面,由左向右方向的一面为几何体的左面,竖直向下方向的一面为几何体的上面.

如图 32-2-3,图(1)这个几何体的主视图、俯视图和左视图如图(2)所示.

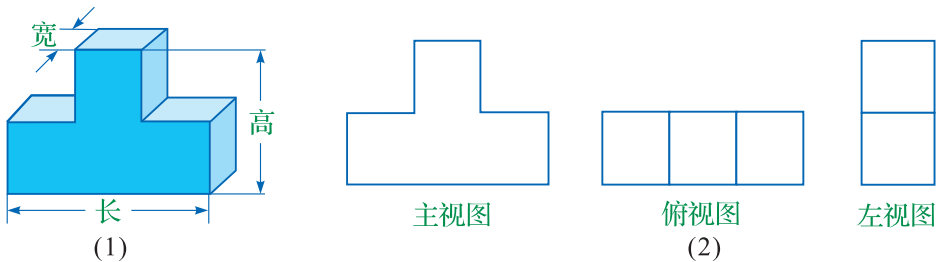


图 32-2-3

例 1 画出如图 32-2-4 所示圆柱的主视图、俯视图和左视图.

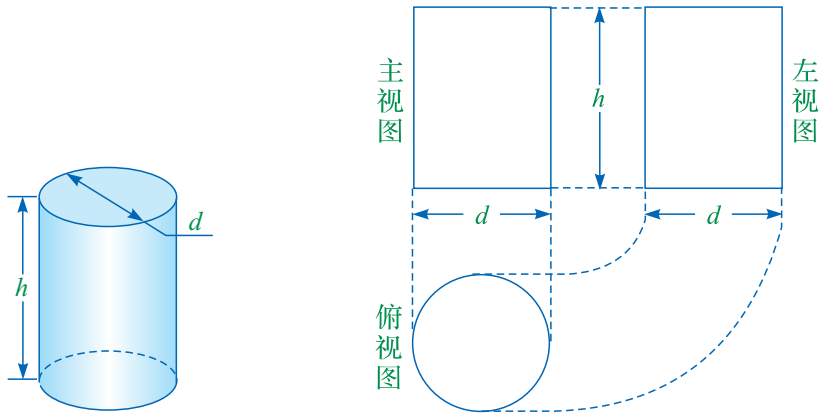


图 32-2-4

图 32-2-5

解:如图 32-2-5,圆柱的主视图是一个长方形,长方形的长和宽分别等于圆柱的高和圆柱底面圆的直径;它的俯视图是一个圆,圆的直径等于圆柱底面圆的直径;它的左视图也是一个长方形,长方形的长和宽分别等于圆柱的高和圆柱底面圆的直径.

在几何体的主视图、俯视图和左视图中,主视图可反映出几何体的长和高,俯视图可反映出几何体的长和宽,左视图可反映出几何体的高和宽.

视图的摆放位置一般是：俯视图在主视图的下面，左视图在主视图的右面，并且应当是“长对正，高平齐，宽相等”。

做一做

1. 如图 32-2-6，已知圆锥的主视图和左视图，请再画出这个圆锥的俯视图。



图 32-2-6

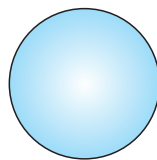


图 32-2-7

2. 如图 32-2-7，请画出球的主视图、俯视图和左视图。

练习

1. 下面(1)，(2)，(3)三幅图中，哪幅图是领奖台的主视图？



(第 1 题)

2. 按要求画出下列几何体的视图。

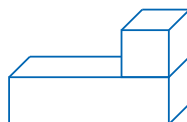


(第 2 题)

习题

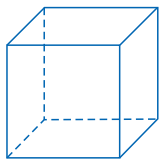
A 组

1. 如图，画出几何体的主视图、俯视图和左视图。

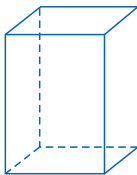


(第 1 题)

2. 如图，画出正方体的主视图、俯视图和左视图.



(第 2 题)



(第 3 题)

3. 如图，画出上、下底面都是正方形的长方体的主视图、俯视图和左视图.

B 组

1. (1) 有没有主视图和左视图完全相同的几何体？如果有，请举例说明.

(2) 有没有主视图、俯视图和左视图完全相同的几何体？

如果有，请举例说明.



2. 如图，画出半球的主视图、俯视图和左视图.

(第 2 题)

我们把两个底面平行、棱垂直于底面的棱柱，叫做直棱柱. 在没有特殊说明的情况下，以后所指棱柱都是直棱柱.



如图 32-2-8 所示为底面是等边三角形的三棱柱. 小明画出的三棱柱的主视图、俯视图和左视图如图 32-2-9 所示. 你认为他画的视图能完全反映三棱柱的特征吗？

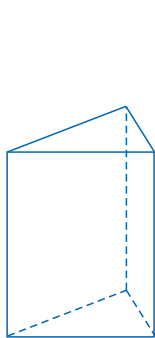


图 32-2-8

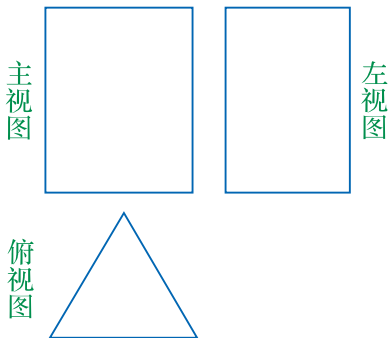


图 32-2-9

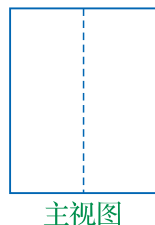
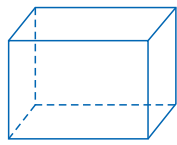


图 32-2-10

这个三棱柱的主视图中有一条线看不见，应画成虚线，如图 32-2-10 所示.

例 2 如图 32-2-11, 分别画出四棱柱(左、右两个面为正方形)和蒙古包模型(上部是圆锥, 下部是圆柱)的主视图、俯视图和左视图.



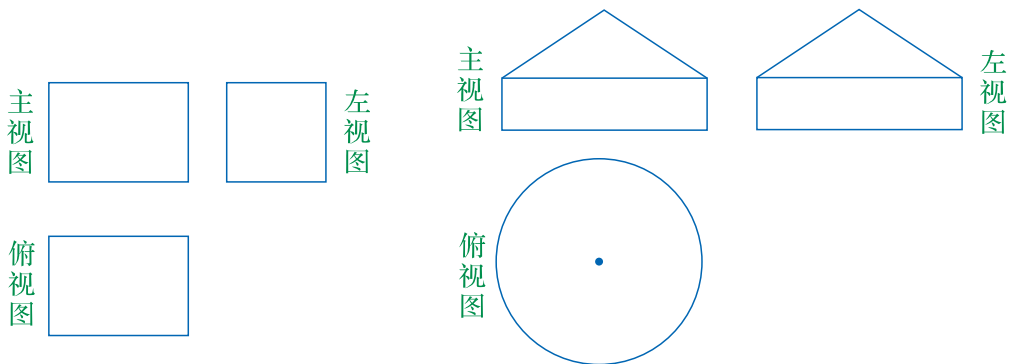
(1)



(2)

图 32-2-11

解: 如图 32-2-12 所示.



(1) 四棱柱视图

(2) 蒙古包模型视图

图 32-2-12



做一做

1. 如图 32-2-13, 画出组合体(由 5 个相同的小正方体构成)的主视图、俯视图和左视图.

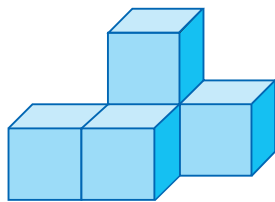


图 32-2-13

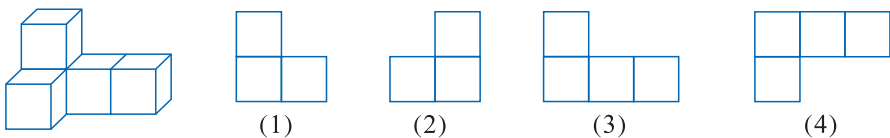


图 32-2-14

2. 如图 32-2-14, 画出螺栓(上部是圆柱, 下部是六棱柱)的主视图、俯视图和左视图.

 **练习**

1. 如图, 由 5 个相同小正方体构成的组合体的俯视图为_____.

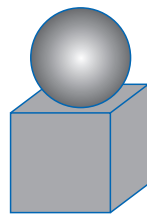


(第 1 题)

2. 如图, 画出底面为正五边形的五棱柱的主视图、俯视图和左视图.



(第 2 题)



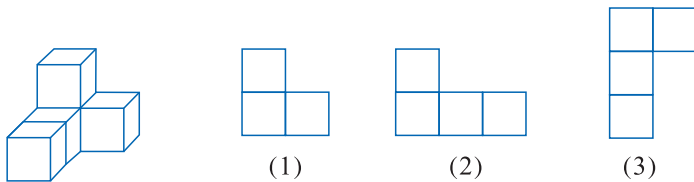
(第 3 题)

3. 如图, 画出这个组合体(下部是正方体, 上部是球, 球的直径等于正方体的棱长)的主视图、俯视图和左视图.

 **习题**

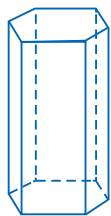
A 组

1. 如图, 分别指出右边三幅图为左边组合体(由一些正方体构成)的哪种视图.

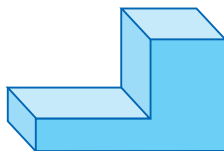


(第 1 题)

2. 如图, 画出底面为正六边形的六棱柱的主视图、俯视图和左视图.



(第2题)

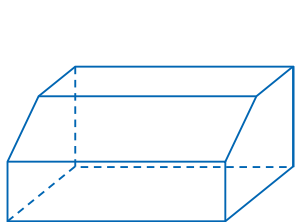


(第3题)

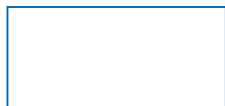
3. 如图, 画出这个零件模型的主视图、俯视图和左视图.

B 组

1. 如图, 请补全图中几何体的三个视图.

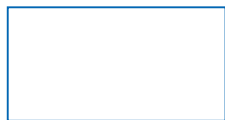


主视图

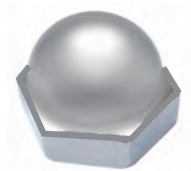


左视图

俯视图



(第1题)

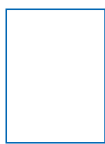


(第2题)

2. 如图, 画出螺母(上部是半球, 下部是六棱柱)的主视图、俯视图和左视图.



1. 如图 32-2-15, 根据视图, 分别描述相应几何体的形状.



(1)



(2)

图 32-2-15

2. 一个几何体的主视图和左视图如图 32-2-16(1)所示, 它可能是哪种

几何体？一个几何体的俯视图如图 32-2-16(2)所示，它可能是哪种几何体？

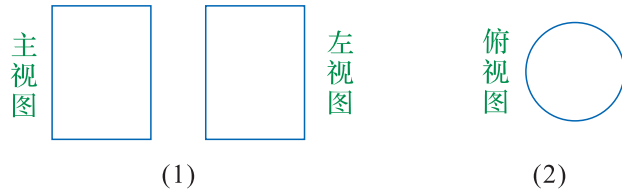


图 32-2-16

3. 两个几何体构成的组合体的视图如图 32-2-17 所示，这个组合体是由什么样的几何体组成的？

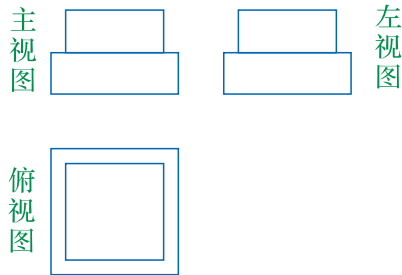


图 32-2-17

例 3 如图 32-2-18，图(1)、图(2)、图(3)分别是底面为正三角形、等腰直角三角形的三棱柱和底面为正方形的四棱柱的俯视图，分别画出它们的主视图和左视图。（棱柱的高都是 1.6 cm）

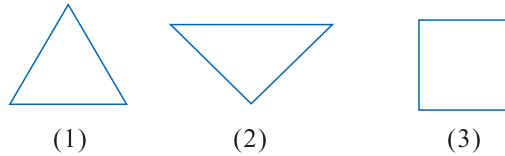


图 32-2-18

解：如图 32-2-19 所示。

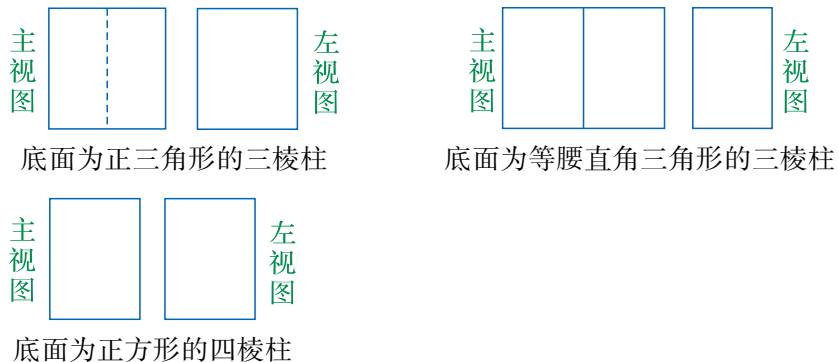
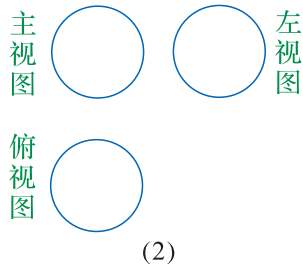
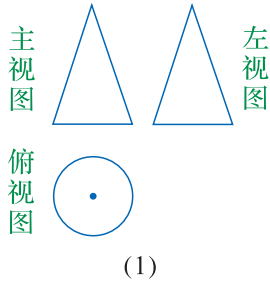


图 32-2-19



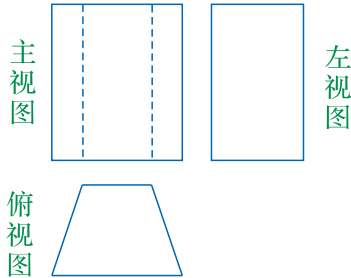
练习

1. 请根据下面两组几何体的视图，分别描述它们各是什么几何体.



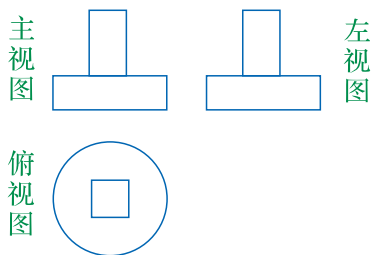
(第 1 题)

2. 根据下面的视图，画出几何体的草图.



(第 2 题)

3. 如图，已知两个几何体构成的组合体的视图，则这两个几何体分别是哪种几何体？



(第 3 题)

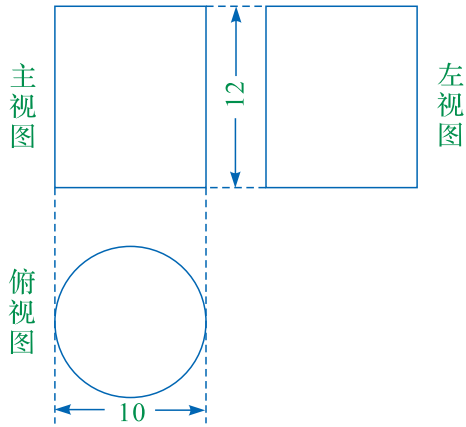


习题

A 组

1. 如图，已知一个几何体的视图. 请根据视图描述该几何体的形状，并计算

它的体积. (结果保留 π , 单位: mm)

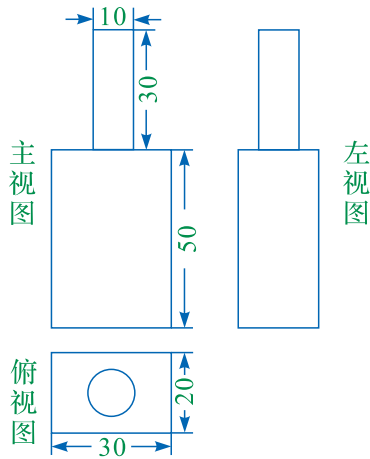


(第 1 题)

2. 如图, 已知一个几何体的视图. (单位: mm)

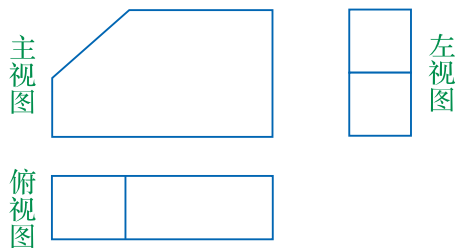
(1) 描述这个几何体的形状.

(2) 计算这个几何体的体积.



(第 2 题)

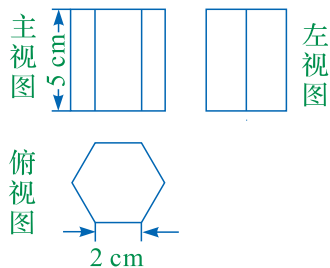
3. 请根据如图所示的视图, 描述相应几何体的形状.



(第 3 题)

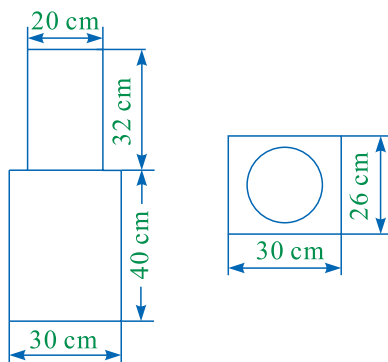
B 组

1. 如图，已知某型号的正六角螺母的视图．它的表面积(侧面积、上底面积和下底面积之和)为 _____ cm^2 ．



(第 1 题)

2. 如图所示为一个几何体的视图(左图为主视图，右图为俯视图)，求该几何体的体积．(π 取 3.14)



(第 2 题)

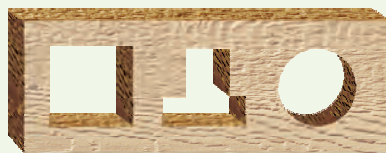


有趣的三用塞子

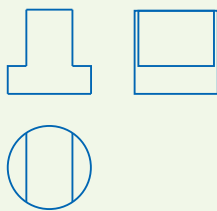
视图的原理在生活中有着广泛的应用。

例如，木板上有三个孔，孔的形状分别是正方形、倒“T”形和圆（图(1)）。如果只用一个塞子，使得它能堵住每一个孔，塞子的形状应是什么样的？

其实，由木板上三个孔的形状我们就可以知道塞子的主视图、俯视图和左视图分别是倒“T”形、圆和正方形（图(2)）了，再由这三个视图，就可以想象出塞子的形状。于是我们就可以设计制作这个塞子了（图(3)）。



(1)



(2)



(3)

类似的三用塞子还有以下形状的。你能指出这两个塞子分别能堵住哪块木板上的三个孔吗？



32.3 直棱柱和圆锥的侧面展开图

圆柱和圆锥都可以沿它们的母线展开成平面图形. 直棱柱的侧面展开图是怎样的呢?

如图 32-3-1, 底面为正六边形的六棱柱, 沿它的一条侧棱展开, 就得到了这个六棱柱的侧面展开图.

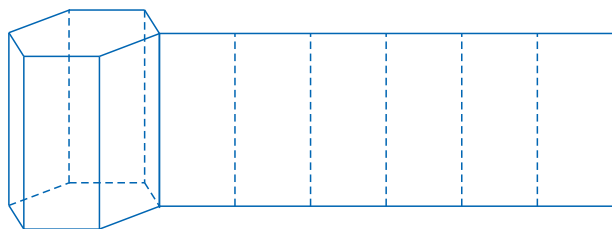


图 32-3-1

观察与思考

1. 在图 32-3-1 中, 六棱柱的侧面展开图为长方形. 这个长方形的长和宽分别与棱柱底面的周长和侧棱长有什么关系?

2. 如图 32-3-2, 底面为多边形的棱柱侧面展开图是长方形吗? 如果是长方形, 那么它的长和宽分别与棱柱底面的周长和侧棱长有什么关系?

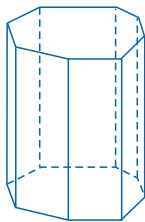


图 32-3-2

大家谈谈

如图 32-3-3, 已知三个棱柱的侧面展开图, 请说说它们分别是什么样的棱柱.

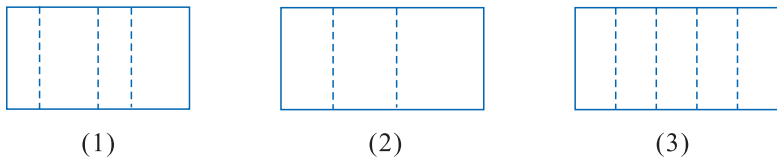


图 32-3-3

做一做

(1) 在硬纸片上画一个半径为 6 cm, 圆心角为 216° 的扇形. 将这个扇形剪下来, 按图 32-3-4 所示围成一个圆锥的侧面. 指出这个圆锥的母线长.

(2) 用一块硬纸片剪出这个圆锥的底面, 和(1)中圆锥的侧面一起做成一个圆锥. (黏合部分忽略不计)

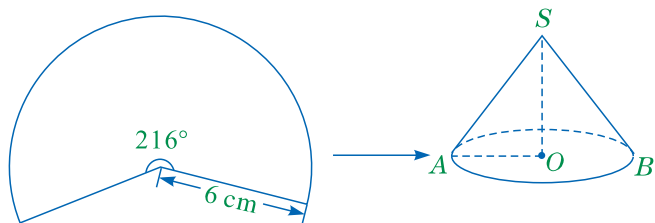


图 32-3-4

几何体可以按它的侧面展开, 也可以按它的表面展开.

例 如图 32-3-5 所示为一个正方体. 按棱画出它的一种表面展开图.

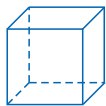


图 32-3-5

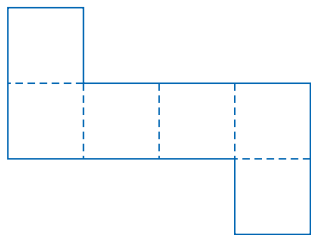


图 32-3-6

解: 按棱展开的方式有多种, 其中一种如图 32-3-6 所示.

一起探究

如图 32-3-7, 已知一个长方体纸箱的长、宽和高分别为 30 cm, 20 cm, 10 cm. 一只昆虫从纸箱的顶点 A 处沿纸箱表面 ACDE 和表面 GEDB 爬到另一个顶点 B 处. 它沿哪条路线爬行的距离最短? 请说明理由, 并求出这个最短距离. (结果保留两位小数)

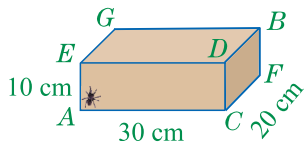


图 32-3-7

如图 32-3-8, 将这个长方体纸箱的表面展开, 连接 AB . 根据“两点之间线段最短”, 可知线段 AB 就是昆虫爬行距离最短的路线.

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC=30\text{ cm}$, $BC=BD+CD=20+10=30(\text{cm})$.

根据勾股定理, 得

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{AC^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{30^2 + 30^2} \\ &= 30\sqrt{2} \\ &\approx 42.43(\text{cm}). \end{aligned}$$

即昆虫最短爬行路线的距离约为 42.43 cm .

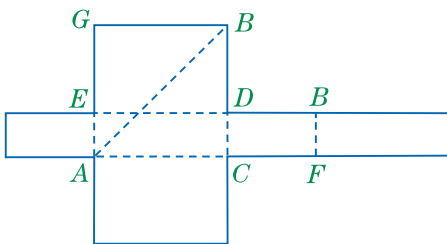
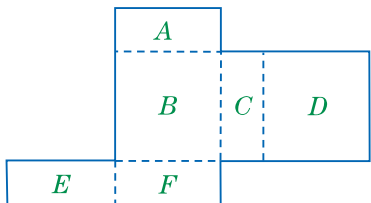


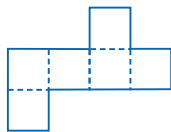
图 32-3-8



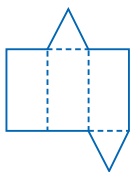
1. 一个长方体的每个面上都标有字母, 它的表面展开图如图所示. 请指出在这个长方体上, 面 A 和面 B 的对面分别是哪个面, 与面 C 相邻的面是哪些面.



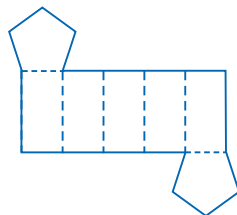
(第 1 题)



(1)



(2)



(3)

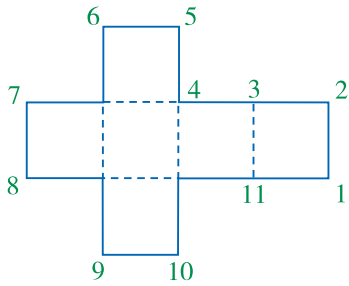
(第 2 题)

2. 如图, 先分别按各几何体表面展开图中的虚线进行折叠, 再指出折叠后构成的几何体的形状.

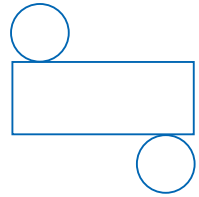


A 组

1. 如图, 把图中所示的硬纸片沿虚线折成正方体后, “6”表示的顶点与哪些数表示的顶点重合?



(第1题)

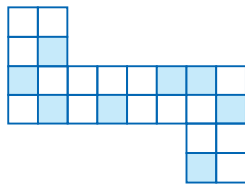


(第2题)

- 如图，分别把两个几何体的表面展开图围成几何体，请指出这两个几何体的形状.
- 用一块长为 12 cm、宽为 5 cm 的长方形硬纸片作侧面，做一个底面是正方形的四棱柱.

B 组

- 如图，左边的平面图形是由右边的某个正方体表面展开得到的，这个正方体是哪个？



(1)



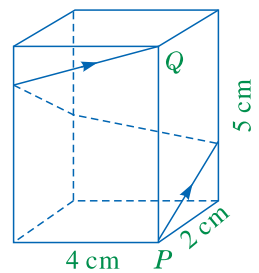
(2)



(3)

(第1题)

- 如图，长方体的长、宽和高分别为 4 cm，2 cm，5 cm. 若一只蚂蚁从点 P 处开始，经过 4 个侧面爬行一圈到达点 Q 处，则蚂蚁爬行的最短路线的长是多少厘米？



(第2题)