义务教育教科书

数学 九年级 下册

教师用书

9

河北教育出版社

义务教育教科书

数学 九年级 下册

教师用书

河北教育出版社

致数学教师

敬爱的老师们：

感谢您使用这套教科书！

依据教育部正式颁布的《义务教育数学课程标准》（2011年版），配合修订并经教育部基础教育课程教材专家工作委员会审查通过的冀教版义务教育教科书《数学（九年级下册）》，我们对原教师用书进行了重编，供教师教学中参考.

一、教科书修订说明

依据《义务教育数学课程标准》（2011年版），我们对本套教科书进行了较大的修订.

1. 修订理念.

一套好的教科书的根本特征，应当是具有促进学生全面发展的教育功能. 全力把学科形态的数学课程打造成较好的“促进学生发展的教育形态”的数学课程，是我们这次教材修订的核心理念.

（1）以“促进学生发展的教育形态”为出发点，修订教材内容，安排知识结构与体系.

首先，素材选择的着眼点贴近学生的生活实际和已有的数学经验，本着“现实性”的原则，在相对严谨的情况下，知识的组织更符合学生的认知水平和年龄特征.

其次，努力使教科书的内容呈螺旋式上升，体现数感、符号意识、数学模型、推理意识、应用意识等核心概念逐步生成的过程.

（2）以“促进学生发展的教育形态”为出发点，构建知识的形成过程. 处理好“具体与抽象”“特殊与一般”“合情推理与演绎推理”“正向与逆向”以及“整体与部分”的关系，使知识的形成过程成为一个“数学化”的过程，一个“再创造”的过程.

（3）以“促进学生发展的教育形态”为出发点，设置课堂活动过程. 创设恰当的问题情境，向学生提供探究的机会，在教师恰当的组织、引领、合作之下，使学生体验到努力后的成功和问题解决后的喜悦，使学生的自信心、责任感、实践能力、创新意识和情感态度的培养目标落在实处.

（4）以“促进学生发展的教育形态”为出发点，把“数学基本思想”渗透到数学内容中，增强数学知识的生命力. 坚持从现实开始，经过探索达到抽象，构建数学模型，进而验证、推广和应用.

2. 教材特色.

本次教科书修订有两个着力点，一是按《义务教育数学课程标准》（2011年版）的要求，增减知识内容，调整整体结构、教学方式和学习方式；二是发扬优良的做法，克服缺陷与不足，力争在教师的“教”和学生的“学”两个方面做到互相兼顾，突出特色，打造亮点.

（1）整合知识内容，确保数学知识和整体结构的科学性.

按照数学内在的知识结构，适度调整知识展现的先后顺序，对相关内容进行科学、合理的整合．按照“螺旋上升”的原则，本着“提前体验渗透，适时集中揭示”的原则，对一些数学知识的呈现进行适度调整，以反映数学知识之间的密切联系.

（2）紧密围绕修订理念，努力渗透“数学基本思想”.

《义务教育数学课程标准》（2011 年版）明确提出了“基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验”四项培养目标，尤其是“数学基本思想”的提出，给教材编写带来了新的发展机遇．在本次修订中，我们作了认真的梳理，并进行了积极的尝试.

（3）关注学生“基本活动经验”的积累，致力于改进学生的活动方式.

一是围绕数学本质特征，兼顾学生的生活经验和数学知识经验，继续做好“问题情境”的创设环节.

二是根据学生的认知规律和数学知识内容的需要，灵活组织教材编写内容的展开方式.

为此，设置了诸如“一起探究”“试着做做”“大家谈谈”等栏目．具体展开方式有：问题式启发、对比式辨析、示例性引导、反思性总结、讨论式拓展等.

（4）重视教师的组织、引领作用，致力于教学方式的改进和完善.

学生是学习的主体，在学生的学习过程中，教师应发挥好主导作用，组织和引领学生开展有效的教学活动，取得良好的教学效果．为此，在教科书的修订过程中，根据数学知识内容的本质属性，我们对有些内容作了较大的修改．如数学概念、运算法则、代数基本性质、几何基本事实、定理的发现与证明等方面，一般都设计成了教师引领下的学生认知活动.

3．知识结构和展开方式.

（1）数与代数.

修订后的教科书更加突出和强化“数与式—方程（不等式）—函数”之间的共性和内在联系，突出它们对数量和数量关系的“表达”和“刻画”的功能，更为明晰地展现了“数学模型”的形成过程及作用.

“数与代数”的学习，最重要的特征是“水平数学化”的过程，即由“实际问题中的数量关系”到“数学模型”的过程，其思维形式主要是“抽象”．“数学模型”“抽象”能力的培养，一是需要典型和适当的“具体”，二是需要恰当的“螺旋上升”．修订中，“数与代数”内容的呈现方式，就是以创设这种螺旋上升的由“具体”到“抽象”的生成情境和过程为基本模式的.

（2）图形与几何.

修订后的教科书不再将推理的学习分为“合情推理”与“推理证明”两个阶段，而是将“合情推理”与“推理证明”两种推理形式，以对图形的“观察”“操作”为基础有机地融合在一起，以突出和强化“发现和提出问题，分析和解决问题”能力的培养.

“图形与几何”的学习，最主要的特征是认识和把握图形的性质和图形间的关系，其思维形式是以“观察”为基础的．本套教科书的修订，“图形与几何”内容的呈现方式便是把“观察”“操作”“猜想到归纳”“概括并说理证明”作为最主要的模式.

（3）统计与概率.

对原教科书中相关内容进行了整合，由原来的五章内容，调整为三章：“数据的收集与整理”“数据分析”和“随机事件的概率”.

统计内容的学习，结合大量有价值的实际问题，经历收集数据—整理和表示数据—数据分析—作出判断这样完整的过程，渗透统计思想，逐步培养学生数理统计分析观念.

（4）综合与实践.

从“课题学习”修订为“综合与实践”，内容变化较大，思维空间更广，研究性学习的特征更加明显. 修订后的教科书中，适当增加了一些“数学活动”的内容.

“综合与实践”内容的展开方式，一般为：情境(问题)—解决方案—启发与引导—问题解决—反思与交流. “数学活动”一般按“问题—活动”两个环节展开.

二、对教师的建议

经过十多年的课程改革和教学实践，人们对数学学习、数学教学和学习评价的认识也在不断的完善和发展，需要老师们进一步的理解和把握，并贯彻落实在教学实践当中.

1. 学习方式.

有意义的接受式学习和自主性学习都是学生进行学习的有效方式，二者应当有机结合，做到和谐统一.

“认真听讲”是一种有效的学习方式. 当然，这种学习方式与自主学习方式不能是对立的，而应是相互关联、相互协调的.

“积极思考”“动手实践”“自主探索”和“合作交流”是学生自主学习的重要方式，也是大力倡导的学习方式. 学生的数学学习应当是一个生动活泼的、主动的和富有个性的过程，在这个过程中，应当留给学生足够的时间和空间来经历观察、实验、猜测、计算、推理和验证等活动，使学生获得直接数学经验. 这种直接数学经验的获得，显然只有“认真听讲”是难以完成的，需要通过自主学习方式的有力支持才能实现. 当然，那些形式上的、无序的、无目的的所谓“自主”也是价值不大的、低效的，甚至是无效的.

2. 教学方式.

教学方式，一般说来没有固定的模式，应当根据具体的数学知识、内容、思想和方法，选择不同的教学方式. 教学方式的选择应有利于教与学两个方面共同开展，应有利于教学活动的有效开展. 目前，取得共识和肯定的教学方式有：

（1）“启发式”是我们的优秀教育传统，也是卓有成效的教学方式之一. 启发式教学的显著特征应当是：①激发学生的学习兴趣；②引发学生的数学思考；③培养学生良好的学习习惯；④帮助学生掌握正确的学习方法.

（2）“面向全体和因材施教”是我国的重要教育思想，也可以说是重要的教学方式. 教学中需要正确处理好二者之间的关系，既要关注全体学生的共同发展，也要关注学生的个性差异和个体需求，最终实现全体学生的全面发展.

3. 学习评价.

评价的根本目的是为了促进学生的发展. 学习评价的内容应包含以下三个方面：

（1）“四基目标”评价，应改变以往的以“双基”为主、以应试技能为重点的评价方

式，在评价“基础知识和基本技能”的同时，关注数学“基本思想和基本活动经验”的评价，突出“发现和提出问题、分析和解决问题”能力的评价.

（2）过程性评价，是一种重要的评价形式，对于促进学生发展具有十分积极的意义和作用. 过程性评价，包括反馈学习信息、诊断学习问题的评价，激励学生学习积极性的评价，学生在学习活动中的态度和行为表现的评价，学习状况和教学状况的评价等方面. 教学中应给予高度的重视，认真、及时地进行过程性评价，做好过程性评价.

（3）多样性评价，指的是评价目标多元和评价方式多样双重意义，这是大力倡导的评价方法和方式. 应立足于学生的发展，立足于知识与技能、数学思考、问题解决、情感与态度四维目标，结合具体的评价内容，确定多角度、多层面、多维度的评价问题. 应改变一张试卷、一次考试下定论的做法，对学生的数学档案袋、数学反思小结、数学调查报告、数学观察记录、数学小课题等材料的评价，都是开展多样性评价的内容.

三、关于教师用书

（1）设计. 本套教师用书采用了与教科书“套排”的方式进行编写，它既包含相应教科书的全部内容，也包含教学和使用的建议.

（2）内容. 本套教师用书的内容包括：每章教科书内容的设计说明和教学建议，每节课的教学目标和每课时的教学活动建议，教科书内容的关注点，教科书栏目的注释和要求，练习题、习题和复习题的答案等.

（3）编写队伍. 本套教师用书是由教科书的所有编者共同参与编写的，他们是：杨俊英、王洁敏、缴志清、程海奎、王佐、徐建乐、苏桂海、李会芳、简友.

教师用书与教科书一样，它的开发和建设需要广大教育工作者的热情关心和大力支持，特别是需要您的积极参与，希望您能多提宝贵意见和建议，以便我们共同编好这套教师用书，更好地服务于数学教学.

编　者

2014 年 9 月

目　　录

第二十九章教学说明和建议

一、设计说明

1.本章的内容、地位和作用.

在上一章我们学习了圆的概念、性质、圆中有关的角等知识.本章的主要内容是点与圆、直线与圆的位置关系,切线的性质与判定,切线长定理,正多边形与圆等相关的知识.

本章主要是由研究一个图形的性质发展到研究两个图形之间的关系,明确提出用数量关系揭示几何图形之间的位置关系,这是几何学习的深化与发展.在学习过程中,将用到前面的许多知识和方法,所以这部分知识的学习也是对前面知识的综合应用的过程.同时,随着对这部分知识的学习,会使学生体会到数学知识与现实生活的密切联系.

2.本章内容呈现方式及特点.

(1)坚持从现实出发,创设贴近学生生活的问题情境,使学生感到亲切、有趣,并具有挑战性,让学生充分经历、感知、体验知识的发生、发展过程.

(2)坚持"做"中学,使学生有自己构建知识的过程.让学生从实例中抽象出几何图形,进而发现点与圆、直线与圆的各种位置关系,经历探究切线的性质与判定,切线长定理,正多边形与圆等相关知识的过程,使学生学习数学的过程成为一个数学化的过程.

(3)坚持在学习数学知识的同时让学生感悟数学思想,掌握数学方法,提高数学素养,促进学生的探索精神与合作意识、理解能力和迁移能力的发展.

二、教学目标

1.经历从现实生活中抽象出点与圆、直线与圆的位置关系的过程.

2.探索并了解点与圆、直线与圆位置的关系,并能用相应的数量关系说明它们的位置关系.

3.掌握切线的概念,探索切线与过切点的半径之间的关系,会过圆上一点画圆的切线.了解直线与圆相切的有关性质,能判断一条直线是否为圆的切线,知道三角形内心的概念.

4.理解切线长的概念,探索并证明切线长定理,并能运用它解决有关的问题.

5.了解正多边形及与其有关的概念,了解正多边形与圆的关系.

6.会用尺规作三角形的内切圆、圆的内接正方形和圆的内切正六边形.

三、教学建议

1.在教科书提供的一些背景下,可继续丰富生活背景,充分利用贴近学生生活的现实情境,从实例中抽取与本章相关的图形,发现图形之间的位置关系.

2.概念的形成过程也是一个思维的过程,所以,要关注学生对概念的理解和认识,引导

学生积极参与探究活动，经历归纳概括、发现新知的过程，逐步提高学生的思维水平.

3.强调学生动手操作和主动参与，使学生真正经历一个自我构建知识的过程，亲身经历每一次“数学化”的过程.

4.关注学生的探究和发现过程，在学生独立思考的基础上，鼓励学生通过小组合作与交流的方式解决问题.

5.重视数学思想方法的渗透.教学中不仅要教知识，更重要的是教方法，本章中涉及的数学思想方法很多，如研究点与圆、直线与圆的位置关系时的分类思想、数形结合思想；研究正多边形的有关问题时的转化思想；研究正多边形的画图是通过等分圆的方法来完成的等等.通过这些知识的教学，使学生掌握化未知为已知、化复杂为简单、化一般为特殊的思考方法，提高学生分析问题和解决问题的能力.

6.进一步培养学生的推理能力.这部分内容所涉及的图形很多是圆与直线的组合，教学时应注意多帮助学生复习有关直线的知识，做到以旧带新、新旧结合.要加强解题思路的分析，帮助学生树立已知与未知、简单与复杂、特殊与一般在一定条件下可以转化的思想，使学生掌握把未知转化为已知、把复杂问题转化为简单问题、把一般问题转化为特殊问题的思考方法.

7.教师在学生活动的过程中，要鼓励学生积极大胆地发表自己的意见，特别是学生与众不同的意见，要有意识地培养学生求异思维的能力和不断创新的欲望.

四、课时建议

29.1	点与圆的位置关系	1 课时
29.2	直线与圆的位置关系	1 课时
29.3	切线的性质和判定	1 课时
29.4	切线长定理*	1 课时
29.5	正多边形与圆	1 课时
	回顾与反思	1 课时
	合计	6 课时

五、评价建议

1.把握好教学要求.在知识和技能方面，应严格控制在《义务教育教学课程标准》(2011年版)要求的范围内，在教学中不要随意扩展和延伸.

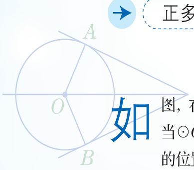
2.反思是学习数学非常重要的过程，同时也是一个提高和升华的过程.教师要鼓励学生在学习的过程中，要经常进行反思.对于在学习过程中能提出或发现问题的学生，要及时地给予鼓励和表扬.

3.对学生在本章学习过程中所反映出来的积极态度、克服困难的精神等方面的评价，应在课堂中随时进行.要特别注意对学习有困难学生的激励性评价，考虑到学生间的差异，肯定他们的点滴进步，使他们体验到获得成功的喜悦，树立起学好数学的信心.

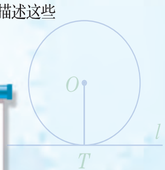
第二十九章 直线与圆的位置关系

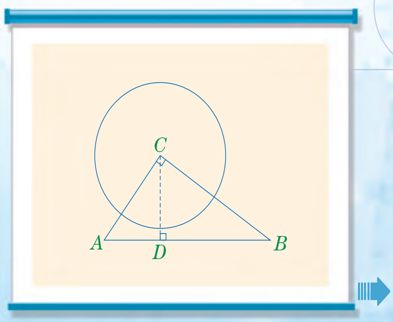
在本章中，我们将学习

- 点与圆的位置关系
- 直线与圆的位置关系
- 切线的性质和判定
- 正多边形与圆



如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，$AC=3$ cm，$BC=4$ cm. 当⊙C的半径变化时，⊙C与AB所在的直线有几种不同的位置关系？能用⊙C的半径与CD的数量关系描述这些位置关系吗？





通过章题页中提出的问题，引出本章将要学习的主要内容，探求直线与圆的位置关系，以及怎样用数量关系来刻画它们之间的位置关系.

＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊

教学目标

1.经历从现实情境中抽象出点与圆的位置关系的过程.

2.通过观察、测量，探索点与圆的各种位置关系及相应的数量关系.

3.在运用数量关系判断点与圆的位置关系的过程中，体会数形结合的思想.

4.在数学活动过程中，发展学生的合作交流意识和主动探索精神.

观察与思考

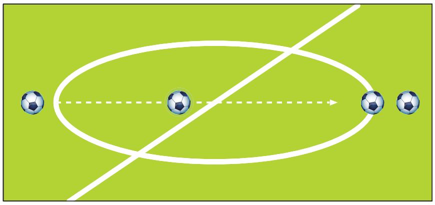
在圆外，在圆上，在圆内，在圆上，在圆外.

29.1 点与圆的位置关系

在平面上，点与直线有两种位置关系：点在直线上和点在直线外. 点与圆有怎样的位置关系呢？这就是本节所要探究的内容.

观察与思考

足球运动员踢出的足球在球场上滚动，在足球穿越中圈区(中间圆形区域)的过程中，可将足球看成一个点，这个点与圆具有怎样的位置关系？



在同一个平面内，点与圆有三种位置关系：点在圆外、点在圆上和点在圆内. 点 P 与⊙O 的位置关系如图 29－1－1 所示.

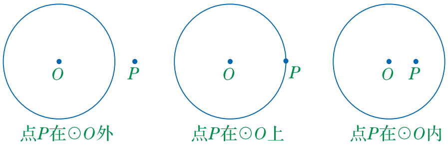


图 29－1－1

试着做做

已知点 P 和⊙O，⊙O 的半径为 r，点 P 与圆心 O 之间的距离为 d.

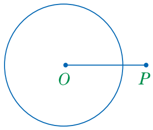
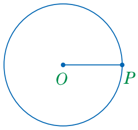
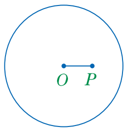
1. 请根据下列图形中点 P 与⊙O 的位置，在表格中填写 r 与 d 之间的数量关系.

教学建议

本节的内容是学习点与圆的位置关系.教科书中设置了“观察与思考”栏目，首先让学生通过观察，在地面上滚动的足球穿越中圈区的过程中球与中圈区的不同位置关系，来感知点与圆的三种位置关系，然后建立数学模型，进一步探究点与圆的三种位置关系.

由圆的定义容易知道：圆上的点到圆心的距离等于圆的半径，圆内的点到圆心的距离小于圆的半径，圆外的点到圆心的距离大于圆的半径.反过来，到圆心的距离等于圆的半径的点都在圆上，到圆心的距离大于圆的半径的点都在圆外，到圆心的距离小于圆的半径的点都在圆内.

1.设置“观察与思考”的目的是，让学生通过观察生活中的实例，初步感知点与圆的三种位置关系，然后用几何图形进行刻画，用数学语言进行描述.

语言描述	图形表示	r 与 d 之间的数量关系
点 P 在⊙O 外		
点 P 在⊙O 上		
点 P 在⊙O 内		

2. 当 d 与 r 分别满足条件 $d>r$，$d=r$，$d<r$ 时，请你指出点 P 与⊙O 的位置关系.

不难发现：

（1）点 P 在⊙O 外$\Leftrightarrow d>r$.

（2）点 P 在⊙O 上$\Leftrightarrow d=r$.

（3）点 P 在⊙O 内$\Leftrightarrow d<r$.

符号“⇔”读作“等价于”，它表示从左端可以推出右端，从右端也可以推出左端.

例 如图 29－1－2，在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=5$ cm，$BC=4$ cm，以点 A 为圆心、3 cm 为半径画圆，并判断：

（1）点 C 与⊙A 的位置关系.

（2）点 B 与⊙A 的位置关系.

（3）AB 的中点 D 与⊙A 的位置关系.

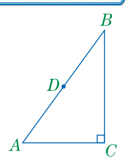


图 29－1－2

解：已知⊙A 的半径 $r=3$ cm.

（1）因为 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3(\text{cm})=r$，所以点 C 在⊙A 上.

（2）因为 $AB=5\text{ cm}>3\text{ cm}=r$，所以点 B 在⊙A 外.

（3）因为 $DA=\dfrac{1}{2}AB=2.5\text{ cm}<3\text{ cm}=r$，所以点 D 在⊙A 内.

试着做做

1. $d>r$，$d=r$，$d<r$.

2. 当 $d>r$ 时，点 P 在圆外；当 $d=r$ 时，点 P 在圆上；当 $d<r$ 时，点 P 在圆内.

2. 对于“试着做做”，结合图形，鼓励学生先进行独立思考，再合作交流，共同总结出点与圆的三种位置关系，以及点到圆心的距离和圆的半径的大小关系.

练 习

1. 点 A 在圆内；点 B 在圆上；点 C 在圆外；点 D 在圆外.
2. 从点 B 开始，在 42 分钟（$\frac{7}{10}$小时）之内行驶是安全的；在 42 分钟之后进入危险区域.

习 题

A 组

1. 点 P 在圆上；点 Q 在圆外；点 R 在圆内.
2. $3<r<5$.

B 组

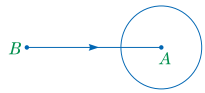
1. (1) $\angle BAC=90°$.
   (2) $90°<\angle BAC<180°$.
   (3) $\angle BAC<90°$.
2. 4 个.

练 习

1. 在直角坐标系中，以原点为圆心的$\odot O$的半径为 5. 判断以下各点与$\odot O$的位置关系：

$$A(4,\ 2),\ B(-3,\ 4),\ C(4,\ -4),\ D(1,\ 5).$$

2. 如图，某海域以点 A 为圆心、3 km 为半径的圆形区域为多暗礁的危险区，但渔业资源丰富. 渔船要从点 B 处前往点 A 处进行捕鱼，B，A 两点之间的距离是10 km. 如果渔船始终保持10 km/h的航速行驶，那么在什么时段内，渔船是安全的？渔船何时进入危险区域？

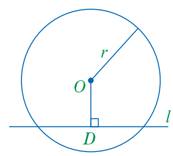


（第 2 题）

习 题

A 组

1. 如图，$\odot O$的半径 $r=5$，圆心 O 到直线 l 的距离 $OD=3$. 在直线 l 上有 P，Q，R 三点，并且 $PD=4$，$QD>4$，$RD<4$. 点 P，Q，R 与圆的位置关系分别是怎样的？

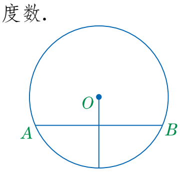


（第 1 题）

2. 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=3$，$AD=4$. 现以点 A 为圆心画圆，使 B，C，D 三点至少有一点在圆内，且至少有一点在圆外. 试确定$\odot A$的半径 r 的取值范围.

B 组

1. 已知 D 为线段 BC 的中点，以 BC 为直径画$\odot D$，再以 BC 为底边画等腰三角形 ABC.
   (1) 当点 A 在$\odot D$上时，求等腰三角形 ABC 顶角的度数.
   (2) 当点 A 在$\odot D$内时，求等腰三角形 ABC 顶角的取值范围.
   (3) 当点 A 在$\odot D$外时，求等腰三角形 ABC 顶角的取值范围.
2. 如图，$\odot O$的半径为 5，圆心 O 到弦 AB 的距离为 2. $\odot O$上到弦 AB 所在直线的距离为 2 的点有几个？



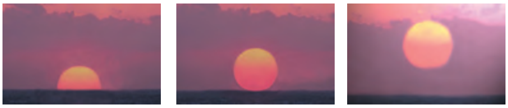
（第 2 题）

4 | 数学 九年级下册

29.2 直线与圆的位置关系

直线与圆有怎样的位置关系？如何用数量关系来描述直线与圆的位置关系呢？

清晨，一轮红日从东方冉冉升起，太阳的轮廓就像一个运动的圆，从地平线下渐渐升到空中. 在此过程中，太阳轮廓与地平线有几种不同的位置关系呢？



一条直线与一个圆的位置关系，根据它们公共点的个数可分为三种情况：两个公共点、一个公共点、没有公共点.

当直线与圆有两个公共点时，我们称直线与圆**相交**；当直线与圆有唯一一个公共点时，称直线与圆**相切**，此时这个公共点叫做**切点**，这条直线叫做圆的**切线**；当直线与圆没有公共点时，称直线与圆**相离**.

直线 l 与⊙O 相交、相切和相离的三种位置关系，如图 29－2－1 所示.

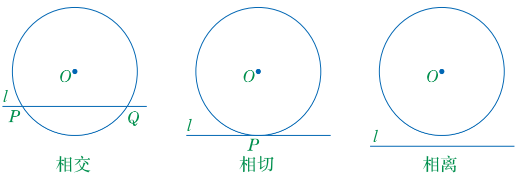


图 29－2－1

直线与圆的位置关系也可以用有关数量之间的关系来刻画.

观察与思考

如图 29－2－2，⊙O 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d.

（1）当 l 与⊙O 相交、相切或相离时，r 与 d 分别具有怎样的数量关系？

（2）当 $d<r$，$d=r$ 或 $d>r$ 时，l 与⊙O 分别具有怎样的位置关系？

教学目标

1.经历从现实情境中抽象出直线与圆的位置关系的过程.

2.理解直线与圆之间有相交、相切和相离三种位置关系.

3.了解切线的概念，探索直线与圆的各种位置关系以及相应的数量关系.

4.在教学活动中，培养学生独立思考的学习习惯、合作交流的意识和探索精神.

观察与思考

（1）当直线 l 与⊙O 相交时，$d<r$；当直线 l 与⊙O 相切时，$d=r$；当直线 l 与⊙O 相离时，$d>r$.

（2）当 $d>r$ 时，直线 l 与⊙O 相离；当 $d=r$ 时，直线 l 与⊙O 相切；当 $d<r$ 时，直线 l 与⊙O 相交.

* * * * * * * * * * * *

教学建议

1.结合问题情境，首先让学生感受生活中反映直线与圆的位置关系的现象，让学生体会直线与圆的位置关系.在教学中，可以利用教科书中提供的情境进行说明，也可以选择其他一些贴近学生生活实际的素材组织教学.

2.对于“观察与思考”，结合图形，通过观察得出“直线与圆的三种位置关系”与“圆心到直线的距离 d 和半径 r 的数量关系”的对应与等价关系，从而实现位置关系与数量关系的相互转化.这种等价关系是研究切线的基础.在教学中，应关注以下活动：

（1）让学生观察图形，动手操作，亲自测量三种不同位置关系下圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r.

（2）分析测量结果，总结在直线与圆的三种位置关系中，直线与圆的公共点的个数以及

练 习

1. 当圆心到这条直线的距离为 3 时,直线与圆相交;当圆心到这条直线的距离为 5 时,直线与圆相切;当圆心到这条直线的距离为 6 时,直线与圆相离.

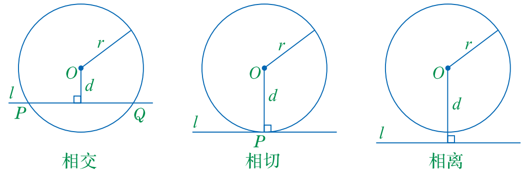


图 29－2－2

经观察,可得:

(1) 直线 l 与⊙O 相交⇔$d<r$.

(2) 直线 l 与⊙O 相切⇔$d=r$.

(3) 直线 l 与⊙O 相离⇔$d>r$.

例 如图 29－2－3,在 Rt△ABC 中,∠$C=90°$,$AC=3$ cm,$BC=4$ cm. 以点 C 为圆心,2 cm,2.4 cm,3 cm 分别为半径画⊙C,斜边 AB 分别与⊙C 有怎样的位置关系? 为什么?

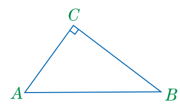


图 29－2－3

解:如图 29－2－4,过点 C 作 $CD\perp AB$,垂足为 D. 在 Rt△ABC 中,

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5(\text{cm}).$$

由三角形的面积公式,并整理,得

$$AC\cdot BC=AB\cdot CD.$$

从而

$$CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{3\times4}{5}=2.4(\text{cm}).$$

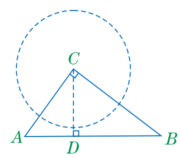


图 29－2－4

即圆心 C 到斜边 AB 的距离 $d=2.4$ cm.

当 $r=2$ cm 时,$d>r$,斜边 AB 与⊙C 相离.

当 $r=2.4$ cm 时,$d=r$,斜边 AB 与⊙C 相切.

当 $r=3$ cm 时,$d<r$,斜边 AB 与⊙C 相交.

练 习

1. 已知一个圆的直径为 10. 如果这个圆的圆心到一条直线的距离分别等于 3,5,6,那么这条直线与这个圆的位置关系分别是怎样的?

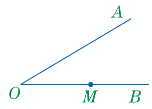
6 | 数学 九年级下册

* * * * * * * * * * * *

所对应的 d 和 r 之间的数量关系.

(3)反过来,观察每种数量关系所对应的位置关系,总结 d 和 r 之间的数量关系所对应的直线与圆的位置关系.

2. 如图，$\angle AOB=30^\circ$，M 为 OB 上一点，且 $OM=6$ cm. 以点 M 为圆心画圆，当其半径 r 分别等于 2 cm，3 cm，4 cm 时，直线 OA 与$\odot M$ 分别有怎样的位置关系？为什么？

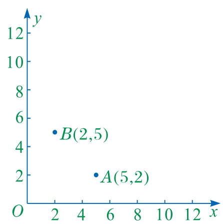


（第 2 题）

习　题

A　组

1. 已知$\odot O$ 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d. 如果直线 l 与$\odot O$ 有公共点，那么 d 与 r 的数量关系是怎样的？
2. 如图，在直角坐标系中有 $A(5,2)$和 $B(2,5)$两点. 以点 A 为圆心、AB 的长为半径画圆. 试确定 x 轴和 y 轴分别与$\odot A$ 的位置关系.



（第 2 题）

B　组

1. 在等腰三角形 ABC 中，$\angle BAC=120^\circ$，$AB=AC=4$. 试确定以点 A 为圆心、2 为半径的圆与 BC 的位置关系.
2. 在$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\angle B=30^\circ$，O 为 AB 上一点，$OA=m$，$\odot O$ 的半径 $r=\frac{1}{2}$. 在下列条件下，分别求 m 的取值范围.
   (1) AC 与$\odot O$ 相离.
   (2) AC 与$\odot O$ 相切.
   (3) AC 与$\odot O$ 相交.

2. 当 $r=2$ cm 时，直线 OA 与$\odot M$ 相离；当 $r=3$ cm 时，直线 OA 与$\odot M$ 相切；当 $r=4$ cm 时，直线 OA 与$\odot M$ 相交.

习　题

A 组

1. $d\leqslant r$.
2. 提示：过点 A 作垂直于 y 轴的直线，过点 B 作垂直于 x 轴的直线，构造直角三角形，利用勾股定理可求得 AB 的长为 $3\sqrt{2}$，点 A 到 x 轴的距离为 2，到 y 轴的距离为 5，所以 x 轴与$\odot A$ 相交，y 轴与$\odot A$ 相离.

B 组

1. 相切.
2. (1) $m>\frac{\sqrt{3}}{3}$.
   (2) $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
   (3) $0\leqslant m<\frac{\sqrt{3}}{3}$.

* * * * * * * * * * * *

教学目标

1.探索切线与过切点的半径之间的关系.

2.了解切线的性质，能判断一条直线是不是圆的切线.

3.在探究切线的性质和判定的过程中，培养学生的探究意识，进一步发展学生的数学思考与表达能力.

一起探究

通过观察、测量等活动，发现 OT 的长等于圆心 O 到直线 l 的最短距离，从而得到 $OT\perp l$.

29.3 切线的性质和判定

我们知道，当直线与圆相切时，圆心到切线的距离等于圆的半径. 圆的切线还有哪些性质？如何判定一条直线是圆的切线呢？

在我们的生活中，经常会遇到直线与圆相切的情形. 如沿直线行驶的自行车车轮与车印，可以看成直线与圆相切的具体实例.

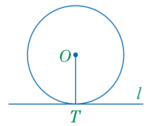


图 29－3－1

直线与圆相切时，还有哪些性质呢？

一起探究

如图 29－3－1，直线 l 为⊙O 的一条切线，切点为 T，OT 为半径. 在直线 l 上任取一点 P，连接 OP. 观察 OT 和 OP 的数量关系，猜想 OT 与切线 l 具有怎样的位置关系.

事实上，$OT\perp l$.

如图 29－3－2，假设 OT 与 l 不垂直. 过点 O 作 $OP\perp l$，垂足为 P. 因为 OP 是垂线段，所以 $OP<OT$（垂线段最短），即圆心 O 到直线 l 的距离小于圆的半径. 由此得到直线 l 与⊙O 相交. 这和直线 l 与⊙O 相切矛盾，所以 $OT\perp l$.

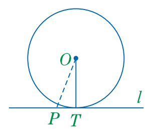


图 29－3－2

圆的切线垂直于过切点的半径.

* * * * * * * * * * * *

教学建议

1.对于问题情境，要引导学生把车轮看做圆、把“车印”看做圆（车轮）的切线、把过切点的辐条看做圆的半径，使学生感受过切点的半径与切线之间的关系.

2.关于“一起探究”，在教学中，要引导学生通过观察、测量、推理等活动，总结出“圆的切线垂直于过切点的半径”.

3.关于“观察与思考”，在教学中，要引导学生有条理地思考，进一步认识圆的切线与半径之间的关系.

4.“过圆上一点画圆的切线”在今后的学习中经常用到，在教学中，要关注学生的画法.

观察与思考

如图 29－3－3，OA 为⊙O 的半径，直线 l 过点 A，且 $l \perp OA$.

（1）如果用 r 表示⊙O 半径的长，d 表示圆心 O 到直线 l 的距离，那么 r 与 d 具有怎样的数量关系呢？

（2）直线 l 是⊙O 的切线吗？

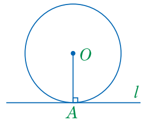


图 29－3－3

因为 $l \perp OA$，垂足为 A，所以 $d=r$，因此 l 与⊙O 相切.

经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

做一做

如图 29－3－4，P 为⊙O 上的一点，请你用三角尺画出这个圆过点 P 的切线.

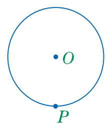
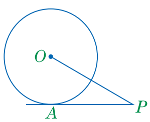


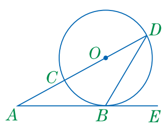
图 29－3－4

练　习

1. 如图，PA 为⊙O 的切线，切点为 A，$OP=2$，$\angle APO=30°$. 求⊙O 的半径.



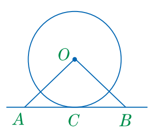
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，CD 为⊙O 的直径，点 A 在 DC 的延长线上，直线 AE 与⊙O 相切于点 B，$\angle A=28°$. 求$\angle DBE$ 的度数.

3. 如图，直线 AB 经过⊙O 上一点 C，并且 $OA=OB$，$CA=CB$. 直线 AB 与⊙O 具有怎样的位置关系？请说明理由.



（第 3 题）

观察与思考

（1）$\because l \perp OA$，

$\therefore$半径 OA 就是圆心 O 到直线 l 的垂线段，

$\therefore d=r$.

（2）直线 l 是⊙O 的切线.

做一做

连接 OP，再过点 P 作直线 $l \perp OP$，直线 l 就是过点 P 的切线.

练　习

1. 连接 OA，$\because PA$ 为⊙O 的切线，$\therefore OA \perp PA$.
   在 Rt$\triangle OAP$ 中，$\angle APO=30°$，$OP=2$，$\therefore OA=1$，
   即⊙O 的半径为 1.
2. 连接 OB，则有 $OB \perp AB$.
   $\therefore \angle AOB=62°$.
   又 $OB=OD$，
   $\therefore \angle OBD=31°$，
   $\therefore \angle DBE=59°$.
3. 直线 AB 是⊙O 的切线.

理由：

连接 OC，

$\because OA=OB$，$CA=CB$，

$\therefore OC$ 是等腰三角形 OAB 的底边 AB 上的中线，

$\therefore OC \perp AB$，

$\therefore$直线 AB 是⊙O 的切线.

习 题

A 组

1. 连接 OC，则有 $OC\perp AB$.
从而有 $AC=BC=\frac{1}{2}AB$，
$\therefore C$ 为弦 AB 的中点.

2. $\angle ABD=45^\circ$. 提示：证明 $BD=AD=DC$.

3. $\because \angle ABT=45^\circ$，$AT=AB$，$\therefore \angle T=45^\circ$.
$\therefore \angle BAT=90^\circ$.
$\therefore AT$ 是 $\odot O$ 的切线.

B 组

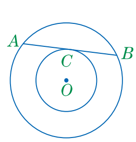
1. 连接 OD，
$\because AD/\!/OC$，$\therefore \angle DAO=\angle COB$，$\angle ADO=\angle COD$.
$\because OA=OD$，
$\therefore \angle DAO=\angle ADO$，
$\therefore \angle COD=\angle COB$.
又 $OD=OB$，$OC=OC$，
$\therefore \triangle OBC\cong\triangle ODC$，
$\therefore \angle ODC=\angle OBC=90^\circ$，
$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线.

2. 由题意可知，AT 是 $\odot O$ 的切线，$\therefore AT\perp OT$.
在 $Rt\triangle ATO$ 中，$OT=6\ 370$ km，$AO=AB+BO=6\ 370.468$(km).
由勾股定理得 $AO^2=AT^2+OT^2$，$\therefore AT=\sqrt{AO^2-OT^2}\approx 77.2$(km).

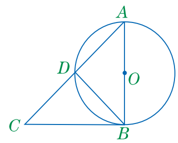
习 题

A 组

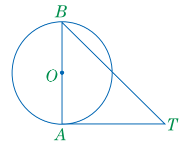
1. 如图，两个圆是以点 O 为圆心的同心圆，大圆的弦 AB 是小圆的切线，C 为切点. C 是 AB 的中点吗？为什么？



（第 1 题）



（第 2 题）



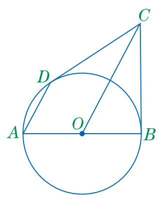
（第 3 题）

2. 如图，在 $\odot O$ 中，AB 为直径，AD 为弦，过点 B 的切线与 AD 的延长线交于点 C，且 $AD=DC$. 求 $\angle ABD$ 的度数.

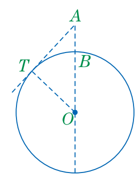
3. 已知：如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，$\angle ABT=45^\circ$，$AT=AB$. 求证：AT 与 $\odot O$ 相切.

B 组

1. 已知：如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，CB 为 $\odot O$ 的切线，切点为 B，弦 AD 平行于 OC. 求证：CD 是 $\odot O$ 的切线.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 上海东方明珠广播电视塔坐落于上海浦东新区陆家嘴，以其 468 m 的高度成为世界著名的高塔. 如图，$\odot O$ 表示过地球球心 O 的截面轮廓，点 A 表示该塔的顶端，AT 是信号覆盖半径. 请计算一下信号覆盖半径可以达到多少千米.（地球半径约为 6 370 km，结果精确到 0.1 km）

29.4 切线长定理*

过圆内一点的直线与圆不相切，过圆上一点只有一条圆的切线，过圆外一点有两条圆的切线. 那么圆外的点到切点的两条线段之间具有怎样的数量关系呢?

一起探究

如图 29－4－1，已知⊙O 及圆外一点 P. 如何过点 P 作出⊙O 的切线呢?

小亮是按下列步骤画图的：

①如图 29－4－2，连接 OP，以 OP 为直径作圆，交⊙O 于 A，B 两点.

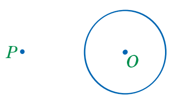


图 29－4－1

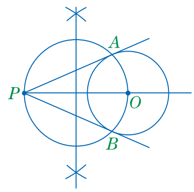


图 29－4－2

②连接 PA，PB.

小亮认为 PA，PB 就是⊙O 的切线.

(1) 你认为 PA，PB 是⊙O 的切线吗? 若是，请说明理由.

(2) 猜想线段 PA，PB 具有怎样的数量关系.

事实上，PA，PB 都是⊙O 的切线，且 $PA=PB$.

下面我们证明：过圆外一点向圆所引的两条切线的长相等.

已知：如图 29－4－3，P 是⊙O 外一点，PA，PB 分别与⊙O 相切于点 A，B.

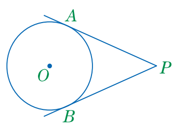


图 29－4－3

教学目标

1.经历探索过圆外一点作圆的切线的过程，知道过圆外一点可以作出圆的两条切线.

2.探索过圆外一点作出的圆的两条切线的切线长相等.

3.会利用圆的切线长定理解决一些简单的问题.

4.知道三角形的内心，会利用尺规找出三角形的内心，能画出三角形的内切圆.

一起探究

(1)连接 OA，OB，

∵OP 为圆的直径，

∴$\angle PAO=\angle PBO=90°$，

∴PA，PB 都是⊙O 的切线.

(2)在 Rt△PAO 和 Rt△PBO 中，

∵$OP=OP$，$AO=BO$，

∴ Rt△PAO≌Rt△PBO，

∴$PA=PB$.

* * * * * * * * * * *

教学建议

这一节内容是选学内容，不做考试要求，在教学时，一定要把握好《义务教育教学课程标准》(2011 年版)的要求，不要随意增加学习内容，补充习题.

1.对于“一起探究”，一定要让学生亲自动手操作，从中感悟、体会过圆外一点所作圆的两条切线的切线长是相等的.另外，要为学生留有充足的交流时间和活动空间，发表自己的看法.

2.关于定理的证明，由于几何部分的证明的学习到了最后阶段，在教学时，建议先让学生试着写出证明过程，教师再给予指导.

3.对于例 2 的教学，应引导学生回顾以前学过的知识，在分析、讨论的基础上，由学生动手操作，进一步体会这样做的依据.

求证：$PA=PB$.

证明：如图 29－4－4，连接 OA，OB，OP.

在Rt△OAP和 Rt△OBP 中，

∵ PA，PB 分别与⊙O 相切于点 A，B，

∴ $PA\perp OA$，$PB\perp OB$.

∴ $\angle OAP=\angle OBP=90^\circ$.

又∵ $OA=OB$，$OP=OP$，

∴ Rt△OAP≌Rt△OBP.

∴ $PA=PB$.

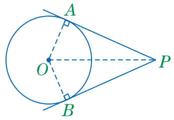


图 29－4－4

我们把线段 PA，PB 的长叫做点 P 到⊙O 的切线长.

切线长定理

过圆外一点所画的圆的两条切线的切线长相等.

在上面的探究过程中，还容易得到$\angle APO=\angle BPO$，即圆外一点与圆心的连线平分过这点的两条切线所形成的夹角.

例 1 已知：如图 29－4－5，过点 P 的两条直线分别与⊙O 相切于点 A，B，Q 为劣弧$\overset{\frown}{AB}$上异于点 A，B 的任意一点，过点 Q 的切线分别与切线 PA，PB 相交于点 C，D.

求证：△PCD 的周长等于 $2PA$.

证明：∵ PA，PB，CD 都是⊙O 的切线，

∴ $PA=PB$，$CQ=CA$，$DQ=DB$.

∴ △PCD 的周长

$=PC+PD+CD$

$=PC+PD+CQ+DQ$

$=PC+PD+CA+DB$

$=PA+PB=2PA$.

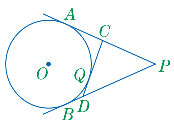


图 29－4－5

例 2 用尺规作圆，使其与已知三角形的三边都相切.

已知：如图 29－4－6，△ABC.

求作：⊙I，使它与△ABC 的三边都相切.

分析：要求作的圆与△ABC 的三边都相切，则这个圆的圆心到

$\triangle ABC$ 三边的距离都相等，所以圆心是三角形两个内角平分线的交点，圆的半径是交点到三角形一边的垂线段的长.

作法：如图 29－4－7.

（1）分别作$\angle B$ 和$\angle C$ 的平分线 BM 和 CN. 设 BM 与 CN 交于点 I.

（2）过点 I 作 $ID\perp BC$，垂足为 D.

（3）以点 I 为圆心、ID 的长为半径作$\odot I$. $\odot I$ 即为所求.

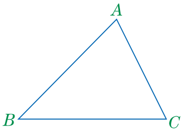


图 29－4－6

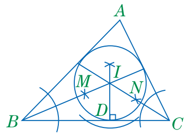


图 29－4－7

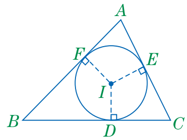


图 29－4－8

如图 29－4－8，作 $IE\perp AC$，$IF\perp AB$，垂足分别为 E，F. 由作图过程可知 $ID=IE=IF$. 因为$\odot I$ 的半径为 ID，所以$\odot I$ 与$\triangle ABC$ 的三边 AB，BC，AC 分别相切于点 F，D，E.

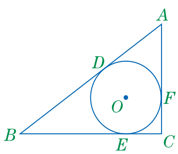
与三角形的三边都相切的圆有且只有一个，我们称这个圆为三角形的**内切圆**(incircle)，称这个圆的圆心为三角形的**内心**(incenter).

练 习

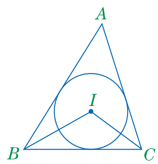
1. 如图，$\odot O$ 为$\triangle ABC$ 的内切圆，切点分别为 D，E，F.

（1）图中有几对相等的线段?

（2）若 $AD=2$，$BE=3$，$CF=1$，求$\triangle ABC$ 的周长.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=50°$，它的内心为 I. 求$\angle BIC$ 的度数.

练 习

1.（1）有 3 对，分别是 $AD=AF$，$BD=BE$，$CE=CF$.

（2）$\triangle ABC$ 的周长为 12.

2.115°.

习 题

A 组

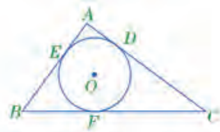
1. 60°，$3\sqrt{3}$.
2. 由题意可得，$AB=3$，$BC=5$，$AC=4$. 设⊙O的半径为r，连接OA，OB，OC，则有 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABO}+S_{\triangle ACO}+S_{\triangle BCO}$，求得$r=1$.
3. 由切线长定理可得，$AE=AH$，$BE=BF$，$CF=CG$，$DG=DH$，
   $\therefore AB+CD=AE+BE+CG+DG=AH+BF+CF+DH=AD+BC$.
4. (1) $AO\perp AP$，$BO\perp BP$，$AB\perp OD$.
   (2) $\triangle AOC\cong\triangle BOC$，$\triangle ACP\cong\triangle BCP$，$\triangle AOP\cong\triangle BOP$.
5. 连接OC，易证明$\triangle EOC\cong\triangle EOB$，
   $\therefore\angle EOC=\angle EOB$.
   $\because OC=OB$，
   $\therefore OE\perp BC$.
   又$\because AC\perp BC$，
   $\therefore AC/\!/OE$.

* * * * * * * * * * *

习 题

A 组

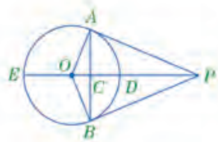
1. 已知⊙O的半径为3，点P与圆心O之间的距离为6. 过点P作⊙O的两条切线，求这两条切线的夹角和切线长.
2. 如图，⊙O为$\triangle ABC$的内切圆，切点分别为D，E，F. $AE=1$，$BF=2$，$CD=3$. 求⊙O的半径.



(第2题)

(第3题)

3. 已知：如图，四边形$ABCD$的四边AB，BC，CD，DA分别与⊙O相切于点E，F，G，H. 求证：$AB+CD=AD+BC$.
4. 如图，PA，PB是⊙O的两条切线，A，B是切点，直线OP交⊙O于点D，E，交AB于点C.
   (1) 请写出图中所有具有垂直关系的直线.
   (2) 请写出图中所有的全等三角形.



(第4题)

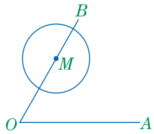
(第5题)

5. 已知：如图，AB为⊙O的直径，E为⊙O外一点，EB，EC分别切⊙O于点B，C. 求证：$AC/\!/OE$.

14 | 数学 九年级下册

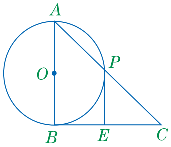
B 组

1. 如图，$\angle AOB=60^\circ$，M 为射线 OB 上的一点，$OM=4$，以点 M 为圆心、2 为半径画圆. 若 OA 绕点 O 按逆时针方向旋转，则当 OA 和 $\odot M$ 相切时，OA 所旋转的角度是多少？



（第 1 题）

2. 已知：如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，BC 切 $\odot O$ 于点 B，AC 交 $\odot O$ 于点 P，点 E 在 BC 上，并且 PE 切 $\odot O$ 于点 P. 求证：$CE=BE$.



（第 2 题）

B 组

1. 设 OA 所旋转的角度为 α 时，OA 与 $\odot M$ 相切，切点为 C，连接 MC，
$\therefore MC\perp OC$.
$\because OM=4$，$MC=2$，
$\therefore \angle MOC=30^\circ$，
$\therefore \alpha=30^\circ$ 或 90°.

2. 连接 PB，则有 $BP\perp AC$，
可得 $\angle C=\angle ABP$.
又知 $EP=BE$，
$\therefore \angle EBP=\angle EPB$，
可得 $\angle CPE=\angle ABP$，
$\therefore \angle C=\angle CPE$，
$\therefore CE=EP$，
$\therefore CE=BE$.

* * * * * * * * * * *

教学目标

1.了解正多边形及与其有关的概念.

2.了解正多边形和圆的关系,并会进行有关的计算.

3.会利用尺规作圆的内接正方形和圆的内接正六边形.

观察与思考

观察图片,初步感知正多边形的共同特点.

大家谈谈

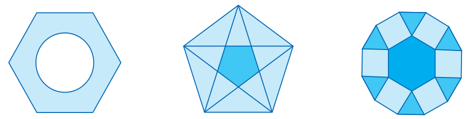
1.将圆 n 等分后,每段圆弧所对的中心角为 $\frac{360^\circ}{n}$,因此,作出相等的圆心角就可以将圆 n 等分;另外,在同圆中相等的圆心角所对的弧相等,用量角器画出一个等于 $\frac{360^\circ}{n}$ 的圆心角,它对着一段弧,然后在圆上依次截取与这条弧相等的弧,就可以将圆 n 等分了.

29.5 正多边形与圆

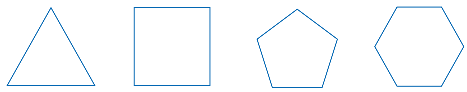
等边三角形、正方形的各边相等,各角也相等. 现实中还有许多各边相等、各角也相等的多边形,这类多边形与圆有着密切的联系.

观察与思考

1. 观察下面的三幅图片,说说图片中各包含哪些多边形.



2. 量一量下列图形的边和角,概括它们的共同特点.



各边相等、各角也相等的多边形叫做**正多边形**(regular polygon).

把一个圆 $n(n\geqslant 3)$等分,顺次连接各等分点,就得到一个正 n 边形. 我们把这个正 n 边形叫做**圆的内接正 n 边形**,这个圆叫做**正 n 边形的外接圆**,外接圆的圆心叫做正多边形的**中心**,外接圆的半径叫做正多边形的**半径**,每一边所对的圆心角叫做正多边形的**中心角**,中心到边的距离叫做正多边形的**边心距**.

如图 29－5－1,正六边形 $ABCDEF$ 为$\odot O$ 的内接正六边形,$\odot O$ 为正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆. 点 O 为这个正六边形的中心,OA 为半径,$\angle AOB$ 为中心角,OH 的长为边心距.

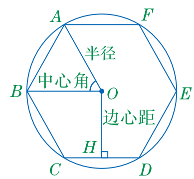


图 29－5－1

大家谈谈

1. 只要将圆 n ($n\geqslant 3$) 等分,就可以画出正 n 边形. 如何将一个圆 n 等分呢?

* * * * * * * * * * * *

教学建议

本节的主要内容是正多边形的有关概念,正多边形的有关计算,以及正多边形的有关画法.

1.正多边形与圆的关系密切,掌握正多边形的有关概念是学好本节内容的关键.在教学中,一定要结合图形,让学生理解每个概念的内涵与外延.

2.我们知道,只要把圆分成一些相等的弧,就可以作出这个圆的内接正多边形,而且这也揭示了正多边形与圆的内在联系,从而可以利用圆的有关知识研究正多边形的有关问题,也可以利用正多边形的有关计算解决圆的有关问题.所以对于“大家谈谈”,一定要给学生充足的活动时间与交流空间.

3.例 1 介绍了利用尺规作圆的内接正方形的方法,在此基础上,可以让学生试着作出

2. 正五边形的中心角是多少度？如何将圆五等分，画正五边形呢？

通过等分圆心角，可以画正多边形. 对于一些特殊情形，可以用尺规作圆的内接正多边形.

例 1 用尺规作圆的内接正方形.

已知：如图 29－5－2，⊙O.

求作：正方形 $ABCD$ 内接于⊙O.

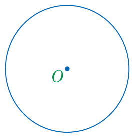


图 29－5－2

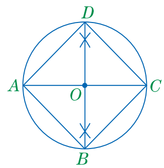


图 29－5－3

作法：(1) 如图 29－5－3，作两条互相垂直的直径 AC，BD.

(2) 顺次连接 AB，BC，CD，DA.

由作图过程可知，四个中心角都是 90°，所以 $AB=BC=CD=DA$. 因为 AC，BD 都是直径，所以 $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=90°$.

即四边形 $ABCD$ 为⊙O 的内接正方形.

试着做做

1. 计算圆的内接正六边形的中心角度数，指出正六边形的边长和外接圆半径之间的数量关系.

2. 用尺规作圆的内接正六边形.（保留作图痕迹，不要求写出作法）

例 2 如图 29－5－4，△ABC 为⊙O 的内接正三角形. 如果⊙O 的半径为 r，求这个正三角形的边长和边心距.

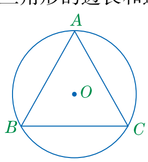


图 29－5－4

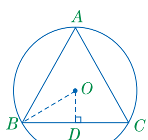


图 29－5－5

2.72°.用量角器画出一个等于 72°的圆心角，它对着一段弧，然后在圆上依次截取与这条弧相等的弧，顺次连接各弧的端点就可以画出一个正五边形.

试着做做

1.60°，正六边形的边长和其外接圆的半径相等.

2.略.

＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊

圆的内接正八边形等.但是，应当让学生清楚，并不是任意的正多边形都可以用尺规作出来，用量角器等分圆周是一种简单而常用的方法.

解：如图 29－5－5，连接 OB，过点 O 作 $OD\perp BC$，垂足为 D.

在 Rt$\triangle OBD$ 中，

$\because\ \angle OBD=30^\circ$，$OB=r$，

$\therefore\ OD=\frac{r}{2}$，$BD=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，$BC=2BD=\sqrt{3}r$.

即这个正三角形的边长为 $\sqrt{3}r$，边心距为 $\frac{r}{2}$.

练 习

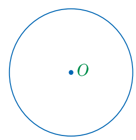
1. 对于三角形，如果三边相等，那么它的三个角一定相等. 反过来，如果三个角相等，那么它的三边也一定相等. 对于其他多边形，如果去掉“各边相等”和“各角相等”两个条件中的任意一个，还能保证这个多边形是正多边形吗？请举例说明.

2. 一个正多边形的边心距与边长的比为 $\frac{1}{2}$，求这个正多边形的边数.

习 题

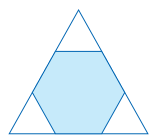
A 组

1. 如图，在⊙O 中，用量角器画出一个正五边形，再画出这个正五边形的各条对角线.



（第 1 题）

2. 如图，正三角形的边长为 6，剪去三个角后成为一个正六边形. 求这个正六边形的面积.



（第 2 题）

练 习

1. 不能. 如矩形，虽然各角都相等但边不相等；菱形，虽然各边都相等但角不相等.
2. 4.

习 题

A 组

1. 略.
2. 正六边形的面积为 $6\sqrt{3}$.

3. 求半径为 2 的圆的内接正三角形，正方形，正六边形的边长、边心距、中心角和面积. 将结果填写在下表中：

圆的内接正多边形	边长	边心距	中心角	面积
正三角形				
正方形				
正六边形				

B 组

1. 要在圆形铁片上截出边长为 15 cm 的正方形铁片，所选用的圆形铁片的直径最小应为多少厘米？
2. 用 36 m 长的篱笆在空地上围出一块场地，现有以下四种设计方案：正三角形、正方形、正六边形和圆. 通过计算说明哪种场地的面积最大.

3. 第一行填：$2\sqrt{3}$，1，120°，$3\sqrt{3}$；第二行填：$2\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，90°，8；第三行填：2，$\sqrt{3}$，60°，$6\sqrt{3}$.

B 组

1. $15\sqrt{2}$ cm.
2. 正三角形场地的面积为 $36\sqrt{3}$ m^2，正方形场地的面积为 81 m^2，正六边形场地的面积为 $54\sqrt{3}$ m^2，圆形场地的面积为 $\frac{324}{\pi}$ m^2. 经比较，围出圆形场地时场地的面积最大.

教学目标

1.能对本章知识进行归纳与总结,理解点与圆、直线与圆的位置关系,了解正多边形与圆的关系.

2.掌握点与圆、直线与圆两种位置关系中不同位置关系的数量表达方式,并会运用这些知识解决一些简单的实际问题.会利用正多边形与圆的关系进行有关的计算.

3.掌握本章中有关尺规作图的问题.

回顾与反思

一、知识结构

- 圆
  - 点与圆的位置关系
    - $d<r$⇔点在圆内
    - $d=r$⇔点在圆上
    - $d>r$⇔点在圆外
  - 直线与圆的位置关系
    - $d<r$⇔直线与圆相交
    - $d=r$⇔直线与圆相切
      - 切线的性质
      - 切线的判定
      - 切线长定理
    - $d>r$⇔直线与圆相离
  - 正多边形与圆
    - 圆的内接正多边形
    - 用尺规作圆的内接正方形和正六边形

二、总结与反思

在本章中,我们研究了点与圆、直线与圆的位置关系. 在此基础上,我们还探究了圆的切线的性质和判定、切线长定理以及正多边形与圆的关系.

在研究点与圆、直线与圆位置关系的过程中,我们利用了分类的思想. 用圆心到点或直线的距离 d 与半径 r 之间的数量关系揭示点或直线与圆的位置关系,这体现了数形结合的思想.

1. 点与圆、直线与圆的位置关系.

点与圆、直线与圆分别有三种位置关系,它们是如何分类的?怎样用圆心到点或直线的距离 d 与半径 r 之间的数量关系来描述这三种位置关系?请填写下表.

点与圆的位置关系	圆心到点的距离 d 与半径 r 的关系	直线与圆的位置关系	公共点的个数	圆心到直线的距离 d 与半径 r 的关系
		相交		
		相切		
		相离		

2. 切线的性质和判定.

切线的性质:圆的切线垂直于过切点的半径.

切线的判定:经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

切线长定理:过圆外一点所画的圆的两条切线的切线长相等.

* * * * * * * * * * * *

教学建议

通过对本章知识内容的回顾与总结,理顺知识脉络,建立知识之间的联系,形成属于学生自己的知识网络.

1.对知识内容的回顾和总结,建议教师结合一组思考题,先由学生各自独立完成,再进行小组讨论和全班交流,最后师生一起理清知识脉络,形成知识结构图.

2.在对知识内容总结的同时,教师更要引导学生,重视对本章所学知识获得过程的反思,感悟数学思想,体会探究过程,让学生积极地参与到对每个问题的反思、交流、合作、探究等活动中,以提升学生分析问题和解决问题的能力.

3.对于“回顾与反思”,在梳理知识的同时,应结合学生在学习过程中出现的问题及应注意的方面,审时度势地进行点拨和引导,确保每个学生都能掌握本章的知识.

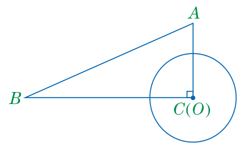
3. 正多边形与圆.

通过等分圆可以画圆的内接正多边形. 回顾用尺规作圆的内接正方形和内接正六边形的方法，思考如何作圆的内接正八边形和正十二边形.

复 习 题

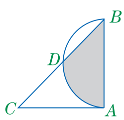
A 组

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$BC=3$，$AC=4$，以点 C 为圆心、BC 长为半径画圆，请你判断点 A 与⊙C 的位置关系.
2. 若 Rt△ABC 的斜边 $AB=6$，直角边 $AC=3$，则圆心为点 C，半径分别为 2，4 的两个圆与 AB 具有怎样的位置关系？当半径为多长时，AB 与⊙C相切？
3. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=5$，$BC=12$，⊙O 的圆心在线段 CA 上，且它的半径为 3.
   (1) 当点 O 与点 C 重合时，⊙O 与直线 AB 具有怎样的位置关系？
   (2) 如果⊙O 沿直线 CA 移动(点 O 沿直线 CA 移动)，当 OC 等于多少时，⊙O 与直线 AB 相切？

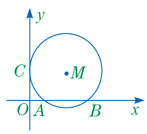


(第 3 题)

4. 计算等边三角形的外接圆面积与内切圆面积的比值.
5. 如图，在△ABC 中，$AB=AC=4$，以 AB 为直径的圆与 AC 相切于点 A，与 BC 相交于点 D. 求图中阴影部分的面积.

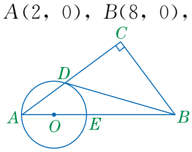


(第 5 题)



(第 6 题)

6. 如图，在平面直角坐标系中，⊙M 与 x 轴相交于点 $A(2，0)$，$B(8，0)$，与 y 轴相切于点 C. 求圆心 M 的坐标.
7. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，点 O 在 AB 上，以点 O 为圆心、OA 长为半径的圆与 AC，AB 分别交于点 D，E，且$\angle CBD=\angle A$. 判断直线 BD 与⊙O 的位置关系，并证明你的结论.



(第 7 题)

复习题

A 组

1. 点 A 在⊙C 外.

2. 斜边 AB 上的高 $CD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

当⊙C 的半径 $r=2$ 时，$r<CD$，∴ ⊙C 与 AB 相离；

当⊙C 的半径 $r=4$ 时，$r>CD$，∴ ⊙C 与 AB 相交；

当 $r=CD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 时，⊙C 与 AB 相切.

3. 点 C 到 AB 的距离为$\frac{60}{13}$.

(1) 当点 O 与点 C 重合时，⊙O 的半径 $r=3<\frac{60}{13}$，⊙O 与 AB 相离.

(2) 当 $OC=\frac{7}{4}$ 时，⊙O 与 AB 相切.

4. 4∶1.

5. $\pi+2$.

6. (5，4).

7. BD 与⊙O 相切. 提示：连接 DE，OD，则 $DE\perp AC$，∴$DE/\!/BC$.
∵$\angle CBD=\angle A$，∴$\angle DEA=\angle CDB$. ∵$OD=OE$，∴$\angle DEA=\angle ODE$.
∵$90°=\angle BDC+\angle BDE=\angle OED+\angle BDE=\angle ODE+\angle BDE$，∴$OD\perp BD$.

8.60°.

9.$7\sqrt{3}$ cm.

10.提示:(1)∵∠DCB=∠A,

∴∠DCB=∠OCA.

又∠OCA+∠OCB=90°,

∴∠DCB+∠OCB=90°.

(2)∵∠D=30°,

∴∠COD=60°,

∴∠A=∠DCB=30°,

∴BO=CO=BC=BD=10,即⊙O 的半径为 10 cm.

B 组

1.提示:连接 OA,OB,可求得 AP=12 cm.

∵PA,PB,DE 都是⊙O 的切线,

∴AE=CE,BD=CD,可求得△PDE 的周长为 24 cm.

2.(1)提示:在 AC 上截取 AF=AB,连接 DF,

∵AD 平分∠CAB,

∴△ABD≌△AFD,

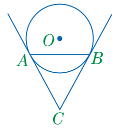
∴BD=FD,∠AFD=∠ABD=90°,

∴点 F 在⊙D 上,AF 为⊙D 的切线,即 AC 为⊙D 的切线.

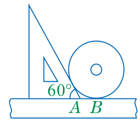
(2)在 Rt△EBD 和 Rt△CFD 中,∵BD=FD,DE=DC,

∴Rt△EBD≌Rt△CFD,∴EB=CF,∴AB+EB=AF+CF=AC.

8. 一个圆球放置在“V”形架上,如图所示为其截面示意图. 在图中,CA 和 CB 都是⊙O 的切线,切点分别是 A,B. 如果⊙O 的半径为$2\sqrt{3}$ cm,且 AB=6 cm,求∠ACB 的度数.



(第 8 题)



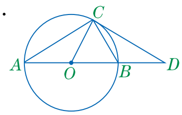
(第 9 题)

9. 如图所示,小明同学测量一个光盘的直径,他将直尺、光盘和三角尺放置于桌面上,并量出 AB=3.5 cm. 求此光盘的直径.

10. 已知:如图,AB 为⊙O 的直径,C 为⊙O 上一点,点 D 在 AB 的延长线上,且∠DCB=∠A.

(1) 求证:CD 为⊙O 的切线.

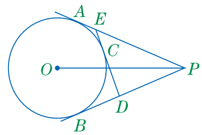
(2) 若∠D=30°,BD=10 cm,求⊙O 的半径.



(第 10 题)

B 组

1. 如图,PA,PB,DE 分别切⊙O 于点 A,B,C. 若⊙O 的半径为5 cm,PO 的长为 13 cm,则△PDE 的周长是多少厘米?

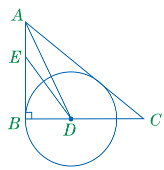


(第 1 题)

2. 已知:如图,在 Rt△ABC 中,∠ABC=90°,∠BAC 的平分线交 BC 于点 D,E 为 AB 上的一点,DE=DC,以点 D 为圆心、DB 长为半径作⊙D. 求证:

(1) AC 为⊙D 的切线.

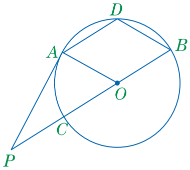
(2) AB+EB=AC.



(第 2 题)

22 | 数学 九年级下册

3. 已知：如图，A，B 为⊙O 上的两点，$\angle AOB=120^\circ$，D 为劣弧$\overset{\frown}{AB}$的中点.

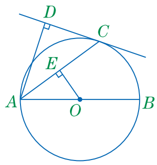


（第 3 题）

（1） 求证：四边形 $AOBD$ 为菱形.

（2） 延长线段 BO 至点 P，交⊙O 于另一点 C，且 $BP=3OB$，连接 AP. 求证：AP 为⊙O 的切线.

4. 已知：如图，AB 为⊙O 的直径，C 为⊙O 上一点，AD 和过点 C 的切线互相垂直，垂足为 D.



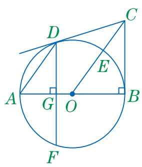
（第 4 题）

（1） 求证：AC 平分$\angle DAB$.

（2） 过点 O 作线段 AC 的垂线 OE，垂足为 E. 若 $CD=4$，$AC=4\sqrt{5}$，求垂线段 OE 的长.

C 组

1. 已知：如图，AB 为⊙O 的直径，$BC\perp AB$，垂足为 B，连接 OC，交⊙O 于点E，D 为⊙O 上一点，$AD\parallel OC$，$DF\perp AB$，垂足为 G.



（第 1 题）

（1） 求证：E 为$\overset{\frown}{BD}$的中点.

（2） 求证：CD 为⊙O 的切线.

第二十九章　直线与圆的位置关系 | 23

3.提示:(1)连接 OD,

∵D 为劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,$\angle AOB=120^\circ$,

∴$\triangle AOD$ 与$\triangle BOD$ 均为正三角形,

∴$AO=AD=BD=OB$.

(2) 连接 AC,可得$\triangle AOC$ 为正三角形.

∵$BP=3OB$,

∴$PC=OC$,

∴$\angle APC=\angle CAP=30^\circ$,

∴$\angle PAO=90^\circ$.

4.提示:(1)连接 OC,则 $OC\perp DC$,$\angle ACO=\angle CAO$.

∵$\angle DCA+\angle ACO=\angle DCA+\angle CAO=90^\circ$,$AD\perp DC$,

∴AC 平分$\angle DAB$.

(2)$AD=8$,$CE=2\sqrt{5}$,由$\triangle ADC\backsim\triangle CEO$,可求得 OE 的长为$\sqrt{5}$.

C 组

1.提示:(1)连接 OD,由 $AD\parallel OC$,可证$\angle COD=\angle COB$,

∴E 为劣弧 $\overset{\frown}{BD}$的中点.

(2)∵$OD=OB$,$CO=CO$,$\angle COD=\angle COB$,

∴$\triangle COD\cong\triangle COB$,

∴$OD\perp DC$.

(3) 连接 BD，可求得 $BD=8, AD=6, DF=\frac{48}{5}$.

2. 提示：(1) 连接 PD，由 $\angle COB=30^\circ$, $PD=\frac{3}{2}$，可得 $OP=3$，

∴点 P 的坐标为 $(0,3)$.

(2) AC 和 $\odot P$ 相切.

理由：作 $PF\perp AC$，垂足为 F. 由 $\angle COB=30^\circ$，$CO=6$，可求得 $AC=4\sqrt{3}$, $OA=2\sqrt{3}$.

由 $\triangle COA\backsim\triangle CFP$，得 $\frac{CP}{CA}=\frac{PF}{OA}$，于是求得 $PF=\frac{3}{2}$，

∴AC 和 $\odot P$ 相切.

(3) ∵ $\angle COB=30^\circ$，

∴$\angle DPO=60^\circ$，

∴$\angle PDE=\angle PED=30^\circ$，

∴$ED=OD$.

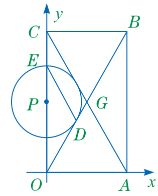
在 $\text{Rt}\triangle ODP$ 中，$PO=3$, $\angle DOP=30^\circ$，

∴$DE=OD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

* * * * * * * * * * *

(3) 若 $\sin\angle BAD=\frac{4}{5}$，$\odot O$ 的半径为 5，求 DF 的长.

2. 如图，在直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点 O 与坐标原点重合，G 为两条对角线的交点，顶点 A 在 x 轴上，顶点 C 的坐标为 $(0，6)$，$\angle COB=30^\circ$. 以 OC 上一点 P 为圆心、$\frac{3}{2}$为半径的圆恰与 OB 相切于点 D.



（第 2 题）

(1) 求点 P 的坐标.

(2) 判断 AC 和 $\odot P$ 的位置关系，并说明理由.

(3) 已知 E 为 $\odot P$ 与 PC 的交点，求 DE 的长.

第三十章教学说明和建议

一、设计说明

1.本章的内容、地位和作用.

本章的主要内容是:二次函数的概念,二次函数的图像和性质,二次函数的应用,二次函数与一元二次方程的关系.

本章内容是在学习了一次函数、反比例函数的基础上,学习的又一类重要函数,是函数内容的继续和延伸.就其内容来讲,无论是表达式,还是图像、性质以及应用都要比前面学习的正比例函数、一次函数和反比例函数复杂.也正因为如此,数学思想方法在本章的体现更为突出,待定系数法、配方法得到进一步的理解,函数思想、模型思想和数形结合思想得到进一步提升.就其联系来讲,从"形"的角度对一元二次方程、一元二次不等式(后续学习,提前渗透)的解给予了直观、合理的解释.就其应用来讲,建立二次函数模型能够解决生产、生活中一类优化问题,也是今后进一步学习函数的重要基础.

2.本章内容呈现方式及特点.

(1)突出数学思想方法.待定系数法、配方法是数学中的两种基本方法,具有普遍适用的价值,既是基本方法,又是基本技能.教科书除了在解决有两个待定系数的表达式时运用待定系数法外,还专门设置了求含有三个待定系数的二次函数表达式,进一步让学生加深对待定系数法的理解(选学).在确定数字系数的二次函数的顶点、对称轴时,要求会用配方法把二次函数的表达式化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式.数形结合的思想在本章体现得更为突出,从二次函数的图像到二次函数的性质,都是在观察图像的基础上获得的.特别是把二次函数配方为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式后,顶点坐标、对称轴方程直接可以得到,更显示出了"数"与"形"的密切关系.二次函数是一类应用广泛的函数,因此模型思想在本章中的地位也尤为突出,二次函数的应用设置了 3 个课时.

(2)重视学生的主体活动.教科书中每个图像的画出、每个结论都是通过设置适合学生发展的"一起探究""观察与思考""大家谈谈""试着做做"等活动,让学生在操作、观察、思考、探究、交流的活动中发现、归纳得到的.这样有利于学习内容的理解,有助于活动经验的积累和学习方式的改变.

二、教学目标

1.经历从实际问题情境中建立二次函数的过程,理解二次函数的意义.

2.会用描点法画二次函数图像,通过观察图像了解二次函数的性质.

3.会用配方法将数字系数的二次函数的表达式化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式,并能由此得到二次函数图像的顶点坐标、图像的开口方向,画出图像的对称轴.

4.知道给定不共线三点的坐标可以确定一个二次函数.

5.了解二次函数与一元二次方程的关系,会利用二次函数的图像求一元二次方程的近似解.

6.能利用二次函数的图像和性质解决简单的实际问题,进一步体会模型思想和函数思

想，发展应用意识.

三、教学建议

1.努力营造学生自主探索、合作交流的环境.学生获得知识，必须建立在自己充分的数学思考的基础上，因此，应让学生充分经历二次函数概念、图像、性质的形成过程，留给他们充足的操作、观察、思考、探究、合作与交流、归纳猜想的空间和时间，让他们亲身经历获取知识的同时发展数学思考，感悟思想方法，积累活动经验，体验成功的乐趣.

2.重视二次函数的应用过程.数学的学习能力，常常体现在对数学知识的应用上.二次函数模型是一种非常重要的模型，应用十分广泛.因此，让学生亲身经历建立二次函数模型的过程(把实际问题抽象成数学问题的过程、用二次函数知识解决问题的过程)，进一步体会模型思想，发展应用研究意识.

3.注重知识间的联系与综合.本章内容是函数内容的最后一章，也是代数内容的最后一章，因此，要尽力体现知识之间的联系，综合运用各种知识来解决问题.如对正比例函数、一次函数、反比例函数和二次函数的表达式、图像和性质进行比较，体会二次函数和一元二次方程的联系等.

4.把握好教学要求.配方法只要求将数字系数的二次函数表达式化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，进而确定二次函数的顶点坐标和对称轴.由不共线三点的坐标确定一个二次函数，从“形”上说是不共线三点可以确定一条抛物线，从“数”上说是二次函数表达式有三个待定系数，有三个方程就可以确定这三个系数.这是对二次函数的进一步理解，也是对待定系数法的进一步认识，是选学内容，不作考试要求.

四、课时建议

30.1	二次函数	1 课时
30.2	二次函数的图像和性质	3 课时
30.3	由不共线三点的坐标确定二次函数*	1 课时
30.4	二次函数的应用	3 课时
30.5	二次函数与一元二次方程的关系	1 课时
	回顾与反思	1 课时
	合计	10 课时

五、评价建议

1.注重学生活动过程的评价.在建立二次函数概念、探究二次函数图像和性质的过程中，学生的主动参与意识，合作交流意识，发现、提出问题和分析、解决问题的意识，以及创新意识等都应给予恰当的评价，更多地给予肯定、支持、帮助和鼓励.

2.注重学生对实际问题“数学化”的评价.在二次函数的应用中，应关注学生能否在具体情境中从数学角度发现问题，能否将其转化为数学问题，能否主动寻求解决问题的方法，能否从图像中获得更多解决问题的信息，能否从不同角度去思考并解决问题，能否对解决问题的过程进行质疑等.

3.要特别注意对学习有困难学生的评价.善于发现他们的“亮点”，发现他们的潜在优势，肯定他们的进步，激发他们的积极主动精神，指出他们今后的努力方向，使他们感到老师和同学都在关注、帮助他们，让他们体验到成功的乐趣，树立起学好数学的信心.

第三十章

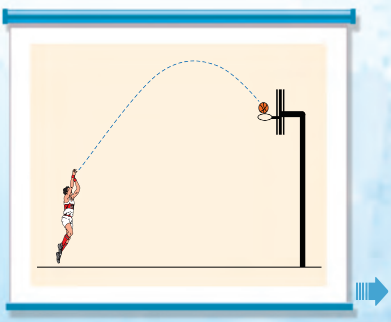
二 次 函 数

在本章中，我们将学习

- 二次函数的概念
- 二次函数的图像和性质
- 二次函数的应用
- 二次函数与一元二次方程的关系

$y=ax^2+bx+c$

如果一种函数的图像就如投出的篮球在空中划过的一条抛物线，我们一定会觉得很有趣．这种函数就是二次函数．



章题页中篮球运动的轨迹是抛物线的一部分，可使学生初步感受到二次函数的存在以及二次函数的图像是一条抛物线，激发学生学习二次函数的热情．

教学目标

1.经历建立二次函数模型的过程,体会二次函数的意义.

2.会确定二次函数的二次项系数、一次项系数和常数项.

一起探究

1.(1)①$4n+6$.②一次函数关系.

(2)①n^2+n-6.②z是n的函数,满足函数的条件.

2.(1)$80x+80$,$80x^2+160x+80$.

(2)y,z都是x的函数,在函数$y=80x+80$中,自变量x是一次的,在函数$z=80x^2+160x+80$中自变量x的最高次数是二次的.

30.1 二次函数

我们已经学习了一次函数和反比例函数,现在,我们来学习二次函数.

一起探究

1. 如图 30-1-1 所示,用规格相同的正方形瓷砖铺成矩形地面,其中,横向瓷砖比纵向瓷砖每排多 5 块,矩形地面最外面一圈为灰色瓷砖,其余部分全为白色瓷砖. 设纵向每排有 n 块瓷砖.

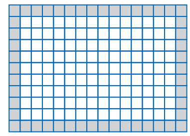


图 30-1-1

(1) 设灰色瓷砖的总数为 y 块.

①用含 n 的代数式表示 y,则 $y=$________.

②y 与 n 具有怎样的函数关系?

(2) 设白色瓷砖的总数为 z 块.

①用含 n 的代数式表示 z,则 $z=$________.

②z 是 n 的函数吗?说说理由.

2. 某企业今年第一季度的产值为 80 万元,预计产值的季平均增长率为 x.

(1) 设第二季度的产值为 y 万元,则 $y=$________________.

设第三季度的产值为 z 万元,则 $z=$________________.

(2) y,z 都是 x 的函数吗?它们的表达式有什么不同?

上面遇到的函数

$$z=n^2+n-6,\quad z=80x^2+160x+80,$$

它们的表达式都是自变量的二次式.

一般地,如果两个变量 x 和 y 之间的函数关系可以表示成 $y=ax^2+bx+c$(a,b,c 是常数,且 $a\neq0$),那么称 y 为 x 的**二次函数**(quadratic function). 其中,a 叫做二次项系数,b 叫做一次项系数,c 叫做常数项.

* * * * * * * * * * *

教学建议

本节的内容是从问题情境中建立二次函数的概念.

1."一起探究"是建立二次函数概念的活动.首先,引导学生探究问题中的数量关系,分别写出两个变量间的表达式,判断两个变量是否存在函数关系.然后,在与一次函数的比较中获得新的一类表达式的特征:表达式都是自变量的二次式.要让学生亲自去"做",在"做"中感悟到这类函数存在于现实中和它们的特征,从而建立起二次函数的概念.

2.定义二次函数的方式与定义正比例函数、一次函数、反比例函数一样,都是用表达式定义的.因此,可以让学生在回忆所学过的函数定义的基础上,根据自己的理解试着写出二次函数的一般表达式,最后老师再进行明确.与所学过的函数相比较,二次函数有三项,需要弄清二次项系数、一次项系数和常数项.

上面得到的两个函数，以及 $y=x^2+2x+\frac{1}{4}$，$y=-\frac{5}{4}x^2+\frac{15}{4}x+5$，$y=3x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2+6$ 等，都是二次函数.

大家谈谈

1. 请分别指出上面出现的二次函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项.

2. 谈谈一次函数、反比例函数、二次函数有什么不同.

做一做

新学期开学，全班同学见面时相互亲切握手问候. 设全班有 m 名同学，每两人之间都握手一次，用 y 表示全班同学握手的总次数.

（1）请用含 m 的代数式表示 y，说明 y 是 m 的二次函数，指出该函数中对应的 a，b，c 的值.

（2）若全班有 45 名同学，则这样握手的总次数是多少?

练 习

1. 指出下列二次函数中相应的 a，b，c 的值：

（1）$y=-5x^2+3x+1$；（2）$y=(x+1)^2-1$；（3）$y=-x^2+6$.

2. 一块长方形草地，它的长比宽多 2 m. 设它的长为 x m，面积为 y m²，请写出用 x 表示 y 的函数表达式. y 是 x 的二次函数吗? 若是，请指出相应的 a，b，c 的值.

习 题

A 组

1. 在下列函数中，哪些是二次函数?

大家谈谈

1.略.

2.一次函数和二次函数的表达式都是整式，但次数不同，反比例函数的表达式是分式.

做一做

（1）$y=\frac{m(m-1)}{2}=\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}m$；$m$ 的最高次数为 2，所以 y 是 m 的二次函数；$a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$，$c=0$.

（2）990 次.

练 习

1.（1）$a=-5$，$b=3$，$c=1$；

（2）$a=1$，$b=2$，$c=0$；

（3）$a=-1$，$b=0$，$c=6$.

2.$y=x^2-2x$，是，$a=1$，$b=-2$，$c=0$.

习 题

A 组

1.（1），（2），（5），（6）.

* * * * * * * * * * *

2.$y=x^2$,是.

3.$y=120x^2-240x+120$.

B 组

1.第一行填:18,11,6,3,2,3,6,11,18;

第二行填:-21,-7,3,9,11,9,3,-7,-21.

2.有两个 x 的值与 $y=27$ 相对应,$x_1=-6$,$x_2=4$.

(1) $y=x^2$;　　(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+1$;

(3) $y=\frac{1}{x}$;　　(4) $y=x+2$;

(5) $y=x^2-2x+2$;　　(6) $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+1$.

2. 正方形的边长为 x cm,面积为 y cm^2,请写出用 x 表示 y 的函数表达式. y 是 x 的二次函数吗?

3. 一台机器原价是 120 万元,每年的折旧率为 x,两年后这台机器的价格为 y 万元. 求 y 关于 x 的函数表达式.

B 组

1. 求出与 x 值对应的函数值:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x^2+2x+3$									
$y=-2x^2-4x+9$									

2. 对于二次函数 $y=x^2+2x+3$,有几个 x 的值与 $y=27$ 相对应?请你利用方程求出这样的 x 的值.

* * * * * * * * * * *

30.2 二次函数的图像和性质

像研究一次函数和反比例函数的性质那样，我们将先画二次函数的图像，再借助此图像来探究二次函数的性质.

二次函数 $y=ax^2$ 的图像和性质

已知二次函数 $y=x^2$，我们可按下列步骤画出它的图像.

（1）列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…

（2）描点：如图 30－2－1，在直角坐标系中描出相应的点.

（3）连线：如图 30－2－2，用平滑曲线顺次连接各点，得到二次函数 $y=x^2$ 的图像.

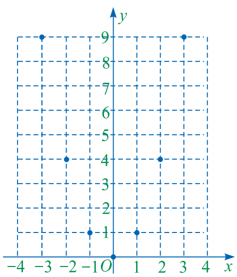


图 30－2－1

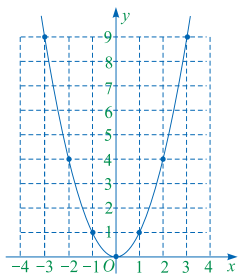


图 30－2－2

观察与思考

观察二次函数 $y=x^2$ 的图像，回答下列问题：

（1）若将 $y=x^2$ 的图像沿着 y 轴对折，y 轴两侧的部分能够完全重合吗？$y=x^2$ 的图像是不是轴对称图形？如果是，那么它的对称轴是哪条直线？

（2）$y=x^2$ 的图像有最低点吗？如果有，那么最低点的坐标是什么？

教学目标

1.经历探究二次函数图像和性质的过程，了解从特殊到一般的解决问题的方式，进一步感悟函数思想.

2.知道二次函数的图像是一条抛物线，会用描点法画二次函数的图像.了解二次函数的性质.

3.会用配方法将二次函数的表达式化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，并能由此确定二次函数图像的开口方向、顶点坐标和对称轴.

观察与思考

（1）能够完全重合，是，y 轴.

（2）有，$(0,0)$.

教学建议

本节是探究二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像和性质，分 3 课时，第 1 课时研究 $y=ax^2$ 的图像和性质，第 2 课时研究 $y=a(x-h)^2$ 和 $y=a(x-h)^2+k$ 的图像和性质，第 3 课时研究 $y=ax^2+bx+c$ 的图像和性质.采用从特殊到一般、从简单到复杂的呈现方式，逐步认识二次函数的图像和性质.

1.由于二次函数 $y=ax^2$ 的图像具有对称性等特点，没有直接让学生画图像，而是让学生观察 $y=x^2$ 的画图（列表、描点、连线）过程，再由学生观察图像，思考所画出的图像是否关于 y 轴对称，图像有没有最低点，直观观察就很容易得到答案.为了加深认识，还可以从上面列出的表格去观察，或从表达式中去分析.

做一做

1.略.

2.略.

大家谈谈

(1) $a>0$,图像开口向上,有最低点;$a<0$,图像开口向下,有最高点.

(2)是,y 轴.

(3)当 $a>0$ 时,$x<0$,y 随 x 的增大而减小;$x>0$,y 随 x 的增大而增大.当 $a<0$ 时,$x<0$,y 随 x 的增大而增大;$x>0$,y 随 x 的增大而减小.

做一做

1. 在如图 30－2－3 所示的直角坐标系中,已画出了 $y=x^2$ 的图像,请再画出函数 $y=-x^2$ 的图像.

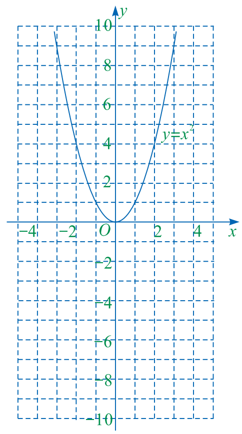


图 30－2－3

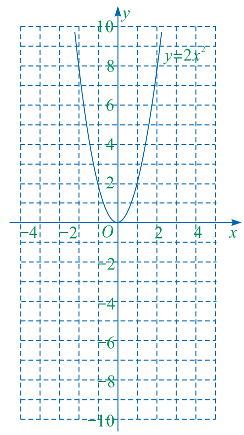


图 30－2－4

2. 在如图 30－2－4 所示的直角坐标系中,已画出了 $y=2x^2$ 的图像,请再画出函数 $y=-2x^2$ 的图像.

大家谈谈

对比函数 $y=x^2$ 与 $y=-x^2$,$y=2x^2$ 与 $y=-2x^2$ 的图像,就二次函数 $y=ax^2$ 回答以下问题:

(1) 图像的开口方向和它的最高(或最低)点与 a 的符号具有怎样的关系?

(2) 图像是不是轴对称图形?如果是,那么它的对称轴是哪条直线?

(3) 根据图像,说明 y 的值随 x 的值增大而变化的情况.

二次函数 $y=ax^2$ 的图像是一条关于 y 轴对称的曲线,这样的曲线叫做**抛物线**(parabola),曲线的对称轴叫做抛物线的对称轴,抛物线与它的对称轴的交点叫做抛物线的**顶点**(vertex).

30 | 数学 九年级下册

* * * * * * * * * * *

2.“做一做”是在观察画二次函数 $y=x^2$ 的图像以及对图像展开研究的基础上,画出函数 $y=-x^2$ 和 $y=-2x^2$ 的图像.学生自己即可完成,教师对学习有困难的学生提供适当的帮助.

3.“大家谈谈”是对“做一做”中得到的函数图像进行观察,发现函数图像的开口方向、对称性和图像的变化规律.如果学生学习有困难,可作进一步的引导,必要时也可以再画出几个这类函数图像帮助学生分析、归纳或验证.

4.对 $y=ax^2$ 的图像和性质的归纳也可以设计成表格,由学生根据“大家谈谈”的认识自己填写,教师进行规范.

二次函数 $y=ax^2$ 的图像和性质

表达式	开口方向	对称轴	顶点坐标	y 随 x 的变化情况	最大(或最小)值
$y=ax^2$ $(a>0)$	向上	y 轴	原点 $(0,\ 0)$	当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大	有最低点 $(0,\ 0)$．当 $x=0$ 时，$y_{最小}=0$
$y=ax^2$ $(a<0)$	向下	y 轴	原点 $(0,\ 0)$	当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小	有最高点 $(0,\ 0)$．当 $x=0$ 时，$y_{最大}=0$

为方便起见，我们把 y 轴记为直线 $x=0$，把过点 $(a,\ 0)$ 且垂直于 x 轴的直线记为直线 $x=a$；把 x 轴记为直线 $y=0$，把过点 $(0,\ b)$ 且垂直于 y 轴的直线记为直线 $y=b$．二次函数 $y=ax^2$ 也称为抛物线 $y=ax^2$．

练　习

1．不画图像，请指出函数 $y=-9x^2$ 图像的开口方向、对称轴、顶点坐标以及最高(或最低)点．

2．先指出抛物线 $y=-\dfrac{1}{3}x^2$ 的开口方向、对称轴和顶点坐标，然后再画出它的图像．

习　题

A　组

1．指出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标．

(1) $y=6x^2$；　(2) $y=-4x^2$；　(3) $y=\dfrac{3}{4}x^2$；　(4) $y=-\dfrac{1}{5}x^2$．

2．分别指出抛物线 $y=3x^2$ 与 $y=-3x^2$ 的开口方向、对称轴、顶点坐标和 y 随 x 的增大而变化的情况，并在同一直角坐标系中画出它们的图像．

B　组

1．对于抛物线 $y=2x^2$ 和 $y=x^2$，你认为它们有哪些不同点？

2．如果抛物线 $y=ax^2$ 经过点 $M(2,\ 5)$，请求出 a 的值，并指出该抛物线的开口方向．

练　习

1．开口向下，y 轴，$(0,0)$，最高点 $(0,0)$．

2．开口向下，y 轴，$(0,0)$，图像略．

习　题

A 组

1．(1) 开口向上，y 轴，$(0,0)$．

(2) 开口向下，y 轴，$(0,0)$．

(3) 开口向上，y 轴，$(0,0)$．

(4) 开口向下，y 轴，$(0,0)$．

2．$y=3x^2$ 的图像开口向上，对称轴是 y 轴，顶点坐标是 $(0,0)$．当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大．$y=-3x^2$ 的图像开口向下，对称轴是 y 轴，顶点坐标是 $(0,0)$．当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小．

B 组

1．开口大小不同．

2．$a=\dfrac{5}{4}$，开口向上．

观察与思考

（1）沿 x 轴向右平移 3 个单位长度.

（2）沿 x 轴向左平移 2 个单位长度.

二次函数 $y=a(x-h)^2$ 与 $y=a(x-h)^2+k$ 的图像和性质

观察与思考

小颖在同一个直角坐标系中，对二次函数 $y=x^2$，$y=(x-3)^2$ 和 $y=(x+2)^2$ 采用如下列表、描点、连线的方式，画出了它们的图像.

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…
x	…	0	1	2	3	4	5	6	…
$y=(x-3)^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…
x	…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	…
$y=(x+2)^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…

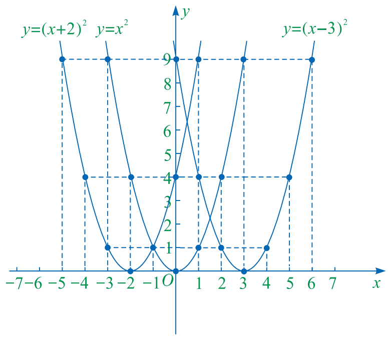


图 30-2-5

从形状上看，二次函数 $y=(x-3)^2$，$y=(x+2)^2$ 的图像与二次函数 $y=x^2$ 的图像是完全相同的，但它们的位置不同.

（1）$y=(x-3)^2$ 的图像可以由 $y=x^2$ 的图像沿什么方向平移多少个单位长度得到？

（2）$y=(x+2)^2$ 的图像可以由 $y=x^2$ 的图像沿什么方向平移多少个单位长度得到？

可以知道，二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图像可以由 $y=ax^2$ 的图像作如下平移得到：当 $h>0$ 时，向右平移 h 个单位长度；当 $h<0$ 时，向左平移 $|h|$ 个单位长度.

* * * * * * * * * * *

教学建议

1.对于 $y=(x-3)^2$ 和 $y=(x+2)^2$ 的图像，由于涉及到对称性，还是先由教师给出画图像的过程，然后学生观察图像，发现它们与 $y=x^2$ 的图像完全相同，只是位置不同，因此可以通过平移得到.平移的规律是怎样的呢？观察图像可以直接得到结论.再把这个结论运用到一般的表达式 $y=a(x-h)^2$ 中，如果学生感到困惑，可以引导学生观察上面列出的表格，或再给出几个图像供学生观察，同时辅之以合作与交流，以启发学生发现这个规律.

2.有了一些沿 x 轴平移图像的经验，图像沿 y 轴平移的规律先由学生自己探究，教师适当地提供一些帮助，再通过交流形成统一的认识.经过两次平移图像，如果学生感到困难，可以引导学生：怎样平移 $y=x^2$ 的图像得到函数 $y=(x-3)^2$ 的图像？怎样平移 $y=(x-3)^2$

做一做

由函数 $y=-2x^2$ 的图像，分别经过怎样的平移可以得到下列函数的图像?

(1) $y=-2(x+1)^2$；(2) $y=-2(x-4)^2$；(3) $y=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$.

一起探究

在图 30－2－6 中的直角坐标系中，已经画出了二次函数 $y=(x-3)^2$ 的图像.

(1) 请你在该坐标系中再画出二次函数 $y=(x-3)^2+1$ 和 $y=(x-3)^2-3$ 的图像.

(2) 试着说明函数 $y=(x-3)^2+1$ 和 $y=(x-3)^2-3$ 的图像可以分别由函数 $y=x^2$ 的图像经过怎样的平移得到.

(3) 请写出函数 $y=(x-3)^2+1$ 和 $y=(x-3)^2-3$ 的图像的对称轴与顶点坐标.

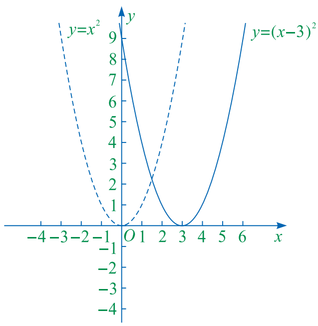


图 30－2－6

大家谈谈

(1) 请说出将二次函数 $y=-2x^2$ 的图像，分别经过怎样的平移，可以得到函数 $y=-2(x-4)^2+6$ 和 $y=-2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-4$ 的图像.

第三十章　二次函数 | 33

做一做

(1)向左平移 1 个单位长度；

(2)向右平移 4 个单位长度；

(3)向右平移 $\frac{3}{2}$ 个单位长度.

一起探究

(1)略.

(2)先向右平移 3 个单位长度，再分别向上平移 1 个单位长度，向下平移 3 个单位长度.

(3)直线 $x=3$，$(3,1)$；直线 $x=3$，$(3,-3)$.

大家谈谈

(1)先向右平移 4 个单位长度，再向上平移 6 个单位长度；先向左平移 $\frac{5}{2}$ 个单位长度，再向下平移 4 个单位长度.

＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊

的图像得到 $y=(x-3)^2+1$ 的图像？即把 $y=x^2$ 的图像经过两次平移得到 $y=(x-3)^2+1$ 的图像.

3.对于“大家谈谈”，可以根据得到的平移规律说明怎样平移，然后再给出图像，以验证发现规律的正确性.

4.对于函数 $y=a(x-h)^2+k$ 图像和性质的概括，可以把前面的那些例子整理在一个表格内，帮助学生发现一般规律，然后概括出一般的结论.

（2）直线 $x=4$，$(4, 6)$；直线 $x=-\frac{5}{2}$，$\left(-\frac{5}{2}, -4\right)$.是由平移确定的.

练 习

第一行填：开口向下；直线 $x=2$；$\left(2, \frac{2}{3}\right)$；当 $x<2$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>2$ 时，y 随 x 的增大而减小；$y_{最大}=\frac{2}{3}$.

第二行填：开口向上；直线 $x=-3$；$(-3, -3)$；当 $x<-3$ 时，y 随 x 的增大而减小，当 $x>-3$ 时，y 随 x 的增大而增大；$y_{最小}=-3$.

第三行填：开口向下；直线 $x=-1$；$(-1, 5)$；当 $x<-1$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>-1$ 时，y 随 x 的增大而减小；$y_{最大}=5$.

（2）指出函数 $y=-2(x-4)^2+6$ 和 $y=-2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-4$ 的图像的对称轴与顶点坐标，并说明是如何确定的.

二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图像和性质

表达式	开口方向	对称轴	顶点坐标	y 随 x 的变化情况	最大(或最小)值
$y=a(x-h)^2+k$ $(a>0)$	向上	直线 $x=h$	(h, k)	当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大	有最低点 (h, k)，当 $x=h$ 时，$y_{最小}=k$
$y=a(x-h)^2+k$ $(a<0)$	向下	直线 $x=h$	(h, k)	当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而减小	有最高点 (h, k)，当 $x=h$ 时，$y_{最大}=k$

例 1 （1）求函数 $y=-\frac{1}{2}(x+5)^2-2$ 的最大(或最小)值.

（2）先将函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像向左平移 2 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度，请写出平移后得到的图像的函数表达式.

解：（1）由 $-\frac{1}{2}<0$，知该函数有最大值.

当 $x=-5$ 时，函数取得最大值，$y_{最大}=-2$.

（2）平移后得到的图像的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-3$.

练 习

填表：

表达式	开口方向	对称轴	顶点坐标	y 随 x 的变化情况	最大(或最小)值
$y=-(x-2)^2+\frac{2}{3}$					
$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-3$					
$y=-(x+1)^2+5$					

习题

A 组

1. 怎样才能由 $y=2x^2$ 的图像经过平移得到函数 $y=2(x-6)^2+7$ 的图像呢?
   小亮说：先向左平移 6 个单位长度，再向上平移 7 个单位长度.
   小明说：先向右平移 6 个单位长度，再向上平移 7 个单位长度.
   小惠说：先向上平移 7 个单位长度，再向右平移 6 个单位长度.
   你同意谁的说法？请说明理由.
2. 指出下列函数图像的开口方向、对称轴、顶点坐标和函数的最大(或最小)值.
   (1) $y=0.6x^2$，$y=0.6(x-2)^2$，$y=0.6(x-2)^2+4$.
   (2) $y=-\frac{3}{4}x^2$，$y=-\frac{3}{4}(x+4)^2$，$y=-\frac{3}{4}(x+4)^2-4$.
   (3) $y=-6x^2$，$y=-6(x-\frac{2}{3})^2$，$y=-6(x-\frac{2}{3})^2+8$.

B 组

1. 将二次函数 $y=-8x^2$ 的图像向左平移 3 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度，求新图像的函数表达式.
2. 指出下列每组两个二次函数图像之间的位置关系.
   (1) $y=3x^2$ 与 $y=-3x^2$.
   (2) $y=3(x+2)^2$ 与 $y=3(x-2)^2$.
   (3) $y=-2(x+1)^2+2$ 与 $y=-2(x+1)^2-2$.
   (4) $y=(x-2)^2+1$ 与 $y=(x+2)^2-1$.

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像和性质

每个二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 都可以通过配方化成

$$y=a(x-h)^2+k$$

的形式：

习题

A 组

1. 同意小明和小惠的说法，$y=2x^2$ 图像的对称轴是 y 轴，顶点坐标是 $(0,0)$；$y=2(x-6)^2+7$ 图像的对称轴是直线 $x=6$，顶点坐标是 $(6,7)$.
2. 略.

B 组

1. $y=-8(x+3)^2-2$.
2. (1) 关于 x 轴对称.
   (2) 把 $y=3(x+2)^2$ 的图像向右平移 4 个单位长度得到 $y=3(x-2)^2$ 的图像.
   (3) 把 $y=-2(x+1)^2+2$ 的图像向下平移 4 个单位长度得到 $y=-2(x+1)^2-2$ 的图像.
   (4) 把 $y=(x-2)^2+1$ 的图像先向左平移 4 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度得到 $y=(x+2)^2-1$ 的图像.

* * * * * * * * * * * *

教学建议

1.二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像是一条抛物线，将二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式就能确定它的开口方向、对称轴和顶点坐标.而对二次函数的表达式 $y=ax^2+bx+c$ 进行配方与一元二次方程配方不同，因两边不能同时除以二次项系数，这是学生容易产生困惑的地方，应让学生搞清楚.因此教学时，可以先对数字系数的二次函数进行配方，然后再对一般的二次函数进行配方.这只是对二次函数图像的一个研究过程，不要求学生掌握.

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$
$$= a\left[x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + c$$
$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

其中，$h=-\frac{b}{2a}$，$k=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

做一做

对比二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图像和性质，填写二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的相关问题的表格：

表达式	开口方向	对称轴	顶点坐标	y 随 x 的变化情况	最大(或最小)值
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$					
$y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$					

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像是一条抛物线，它的对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$.

若 $a>0$，则抛物线开口向上，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 取得最小值，且 $y_{最小}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

若 $a<0$，则抛物线开口向下，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a},\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 取得最大值，且 $y_{最大}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

2.有了一般的结论，就可对数字系数的二次函数表达式通过配方确定对称轴、顶点坐标，求出最大(或最小)值，并画出图像.这是要求“会”的内容，需要掌握配方法.

3.例 2 是要求用顶点坐标式求二次函数的对称轴和顶点坐标，然后画出二次函数图像，要掌握解决这类问题的步骤.

4.例 3 是根据已知条件求二次函数的表达式，是待定系数法的运用，要根据问题的条件，确定表达式的形式.

为方便起见，我们把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 也称为抛物线 $y=ax^2+bx+c$.

例 2 求抛物线 $y=x^2+2x-1$ 的对称轴和顶点坐标，并画出它的图像.

解：∵ $y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$，

∴ 抛物线的对称轴为 $x=-1$，顶点坐标为 $(-1,-2)$.

(1) 列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	…
$y=x^2+2x-1$	…	2	-1	-2	-1	2	…

(2) 在直角坐标系中，描点，连线，即得二次函数 $y=x^2+2x-1$ 的图像，如图 30-2-7.

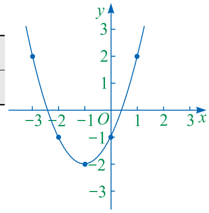


图 30-2-7

例 3 根据下列条件，确定抛物线的表达式.

(1) 抛物线 $y=-2x^2+px+q$ 的顶点坐标为 $(-3,5)$.

(2) 抛物线 $y=ax^2+bx-6$ 经过点 $A(-1,3)$ 和 $B(2,-6)$.

解：(1) ∵ $y=-2x^2+px+q=-2\left(x-\dfrac{p}{4}\right)^2+\dfrac{p^2+8q}{8}$，

∴ $\dfrac{p}{4}=-3$，$\dfrac{p^2+8q}{8}=5$，

∴ $p=-12$，$q=-13$.

所以该抛物线的表达式为 $y=-2x^2-12x-13$.

(2) 点 $A(-1,3)$ 和 $B(2,-6)$ 的坐标满足抛物线的表达式，即

$$\begin{cases}a-b-6=3,\\4a+2b-6=-6.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}a=3,\\b=-6.\end{cases}$$

所以该抛物线的表达式为 $y=3x^2-6x-6$.

练 习

1. 求下列抛物线的对称轴和顶点坐标，并指出它们的开口方向.

(1) $y=3x^2-6x+1$；　　(2) $y=-2x^2-6x-1$.

2. 画出抛物线 $y=x^2-4x+2$ 的图像，并说明当 $x=-2$ 和 $x=-1$ 时，哪一个对应的函数值较大.

练 习

1.(1) 直线 $x=1$，$(1,-2)$，开口向上；

(2) 直线 $x=-\dfrac{3}{2}$，$\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{2}\right)$，开口向下.

2. 图像略，$x=-2$ 对应的函数值较大.

* * * * * * * * * * *

习 题

A 组

1.(1) 直线 $x=1$，$(1,7)$，开口向上.

(2) 直线 $x=\frac{3}{10}$，$(\frac{3}{10},-\frac{31}{20})$，开口向下.

2.(1) 直线 $x=1$，$(1,3)$.

(2) 略.

(3) $y_1<y_2$.

3.(1) $y=-2(x+\frac{5}{4})^2+\frac{97}{8}$，最大值为 $y=\frac{97}{8}$.

(2) $y=2(x+\frac{3}{4})^2-\frac{9}{8}$，最小值为 $y=-\frac{9}{8}$.

(3) $y=\frac{5}{2}(x-\frac{4}{5})^2-\frac{3}{5}$，最小值为 $y=-\frac{3}{5}$.

(4) $y=-\frac{3}{4}(x-3)^2+\frac{19}{4}$，最大值为 $y=\frac{19}{4}$.

B 组

1.(1) $y=x^2-4x+7$.

(2) $y=-x^2-2x-1$.

2.配方得 $y=(x-p)^2+16-p^2$.若顶点在 x 轴上，则 $p=\pm4$；若顶点在 y 轴上，则 $p=0$.

习 题

A 组

1. 求下列抛物线的对称轴和顶点坐标，并指出它们的开口方向.

(1) $y=x^2-2x+8$；

(2) $y=-5x^2+3x-2$.

2. 已知抛物线 $y=-x^2+2x+2$.

(1) 这条抛物线的对称轴是________，顶点坐标是________.

(2) 画出这条抛物线.

(3) 这条抛物线上 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$ 两点的横坐标满足 $x_1>x_2>1$，观察图像，指出 y_1 与 y_2 的大小关系.

3. 通过配方，把下列函数化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，并指出函数的最大(或最小)值.

(1) $y=-2x^2-5x+9$；　　(2) $y=2x^2+3x$；

(3) $y=\frac{5}{2}x^2-4x+1$；　　(4) $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-2$.

B 组

1. 根据下列条件，求抛物线的表达式.

(1) 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的顶点为 $M(2，3)$.

(2) 抛物线 $y=ax^2-2x+c$ 经过点 $A(-1，0)$ 和 $B(2，-9)$.

2. 已知抛物线 $y=x^2-2px+16$ 的顶点在坐标轴上，试确定 p 的值.

30.3 由不共线三点的坐标确定二次函数*

已知两点的坐标，可以确定一次函数. 如何由不共线三点的坐标来确定二次函数呢?

在直角坐标系中，由不共线三点的坐标可以确定二次函数的表达式.

已知不共线的三点 $A(1,3)$，$B(2,-2)$，$C(-1,1)$，怎样确定过这三点的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的表达式呢?

联想用待定系数法求一次函数表达式的过程，小亮想到了用待定系数法求二次函数的表达式:

将 A，B，C 三点的坐标分别代入二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，得

$$\begin{cases} a+b+c=3, \\ 4a+2b+c=-2, \\ a-b+c=1. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a=-2, \\ b=1, \\ c=4. \end{cases}$$

所求二次函数的表达式为 $y=-2x^2+x+4$.

大家谈谈

用待定系数法求二次函数表达式的过程与求一次函数表达式的过程有哪些相同点与不同点?

例 已知三点 $A(0,1)$，$B(1,0)$，$C(2,3)$，求由这三点所确定的二次函数表达式.

解：设所求二次函数为 $y=ax^2+bx+c$. 将 A，B，C 三点的坐标分别代入二次函数表达式中，得

$$\begin{cases} c=1, \\ a+b+c=0, \\ 4a+2b+c=3. \end{cases}$$

解得

教学目标

1.知道不共线三点的坐标可以确定一个二次函数.

2.了解用待定系数法求过不共线三点的二次函数的表达式.

大家谈谈

相同点：两种方法都是先确定表达式的形式，再求出待定系数. 不同点：求一次函数表达式需要列出两个方程，求二次函数表达式一般需要列出三个方程.

教学建议

本节课是选学内容，不作考试要求. 从"形"上讲，不共线三点可以确定一条抛物线；从"数"上讲，二次函数有三个系数，需要三个方程来确定. 本节课的关键是通过不共线三点的坐标确定二次函数的表达式，理解待定系数法.

1.用待定系数法求二次函数表达式时，一般设二次函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$，也可以从二次函数图像的角度考虑，设表达式为 $y=a(x-h)^2+k$.

2.在解三元一次方程组时，选择适当的方法可使问题解决起来更简捷. 比如已知三点坐标时，先消去 c 更方便.

做一做

$$y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}.$$

练 习

$y=x^2-2x+8.$

习 题

A 组

1.(1)$y=x^2-4x-6.$

(2)直线 $x=2$,$(2,-10)$.

2.$y=x^2-3x+2.$

B 组

1.$y=x^2+x-2$,选取三点或利用对称性.

2.把点 A,B,C 分别向上平移 1 个单位长度得到点 A',B',C',实际上相当于把过点 A,B,C 的抛物线向上平移了 1 个单位长度,得到过点 A',B',C' 的抛物线.

$$\begin{cases}a=2,\\b=-3,\\c=1.\end{cases}$$

所求二次函数的表达式为 $y=2x^2-3x+1$.

做一做

在直角坐标系中，已知点 $A(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$，$B(-\frac{3}{2}, 0)$，$C(\frac{1}{2}, 0)$. 求由 A，B，C 三点所确定的二次函数表达式.

练 习

求由 $A(1, 7)$，$B(2, 8)$，$C(3, 11)$三点所确定的二次函数表达式.

习 题

A 组

1. 已知二次函数 $y=ax^2-4x+c$ 的图像经过点 $A(-1, -1)$，$B(3, -9)$.
   (1) 求这个二次函数的表达式.
   (2) 写出这条抛物线的对称轴和顶点坐标.
2. 求由 $A(1, 0)$，$B(3, 2)$，$C(-2, 12)$三点所确定的二次函数表达式.

B 组

1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中的自变量 x 和函数 y 的部分对应值如下表：

x	…	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	…
y	…	$-\frac{5}{4}$	-2	$-\frac{9}{4}$	-2	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{7}{4}$	…

请用不同的方法求出这个二次函数的表达式.

2. 若过 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$三点的函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$，则过 $A'(x_1, y_1+1)$，$B'(x_2, y_2+1)$，$C'(x_3, y_3+1)$三点的函数的表达式为 $y=ax^2+bx+(c+1)$. 这是为什么？

30.4 二次函数的应用

通过建立二次函数模型并利用它的有关性质，可以解决许多实际问题.

例 1 如图 30－4－1，一名运动员在距离篮圈中心 4 m（水平距离）远处跳起投篮，篮球准确落入篮圈. 已知篮球运行的路线为抛物线，当篮球运行的水平距离为 2.5 m 时，篮球达到最大高度，且最大高度为 3.5 m. 如果篮圈中心距离地面 3.05 m，那么篮球在该运动员出手时的高度是多少米？

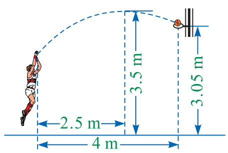


图 30－4－1

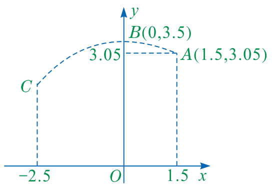


图 30－4－2

分析：由于篮球在空中运行的路线为一条抛物线，所以可以建立恰当的直角坐标系，求出该抛物线的表达式，借助表达式来解决所求问题.由题设，已知抛物线的顶点，建立顶点在 y 轴上的直角坐标系，可使所得的函数表达式较简单.

解：如图 30－4－2，建立直角坐标系，篮圈中心为点 $A(1.5, 3.05)$，篮球在最大高度时的位置为点 $B(0, 3.5)$. 以点 C 表示运动员投篮球的出手处.

设以 y 轴（直线 $x=0$）为对称轴的抛物线为 $y=a(x-0)^2+k$，即 $y=ax^2+k$，而点 A，B 在这条抛物线上，所以有

$$\begin{cases} 2.25a+k=3.05, \\ k=3.5. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=-0.2, \\ k=3.5. \end{cases}$$

教学目标

1.经历用二次函数模型解决实际问题的过程.进一步体会模型思想，发展应用意识.

2.能用二次函数解决简单的实际问题.

教学建议

本节是二次函数的应用，重点是使学生实现“数学化”，即把实际问题抽象成数学问题、建立二次函数模型，再利用二次函数的图像和性质解决这个问题.

1.例 1 就是章题页中的问题，篮球在空中运行的轨迹是一条抛物线，因此解决问题的关键是建立直角坐标系、写出点的坐标、求出表达式.建立不同的直角坐标系，点的坐标和求出的表达式是不同的.

2.“做一做”中的喷灌器喷出的水流是抛物线形的，也需建立适当的直角坐标系、求抛物线的表达式.包括练习在内，建立了三种不同的直角坐标系，这样可以体会建立适当的直角坐标系可为解决问题带来方便.

所以该抛物线的表达式为 $y=-0.2x^2+3.5$.

当 $x=-2.5$ 时，$y=-0.2\times(-2.5)^2+3.5=2.25(\mathrm{m})$.

答：篮球在该运动员出手时的高度为 2.25 m.

做一做

如图 30－4－3，某喷灌器 AB 的喷头高出地面 1.35 m，喷出的水流呈抛物线形从高 1 m 的小树 CD 上面的点 E 处飞过，点 C 距点 A 4.4 m，点 E 在直线 CD 上，且距点 D 0.35 m，水流最后落在距点 A 5.4 m 远的点 F 处. 喷出的水流最高处距地面多少米?

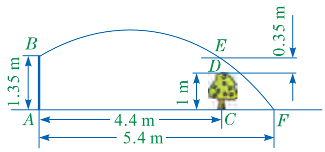


图 30－4－3

水流最高处到地面的距离即为抛物线顶点到地面的距离. 为求抛物线的表达式，小亮和小惠分别建立了如图 30－4－4 和图 30－4－5 所示的直角坐标系，并写出了相关点的坐标.

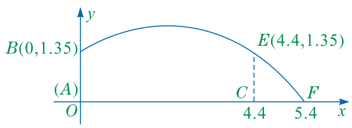


图 30－4－4

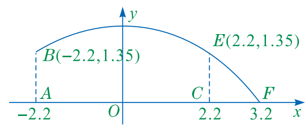


图 30－4－5

（1）请分别按小亮和小惠建立的直角坐标系求这条抛物线的表达式.

（2）根据以上两种表达式，求出水流最高处到地面的距离.

做一做

(1) $y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{11}{10}x+\dfrac{27}{20}$，$y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{64}{25}$.

(2) 2.56 m.

练 习

对上面的抛物线形水流问题，请以地平线 ACF 为横轴，以 F 为原点建立直角坐标系，并解决相应的问题.

练 习

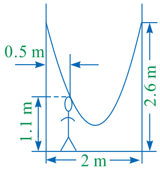
$y=-\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{8}{5}x$，2.56 m.

习 题

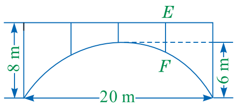
A 组

1. 如图，在相距 2 m 的两棵树上拴了一根绳子做成一个简易秋千，拴绳子

的地方都高出地面 2.6 m，绳子自然下垂近似呈抛物线形. 当身高 1.1 m 的小妹距较近的那棵树 0.5 m 时，头部刚好接触到绳子，则绳子的最低点距地面的距离为________ m.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，一座拱桥的轮廓呈抛物线形，拱高 6 m，跨度为 20 m，相邻两立柱间的距离均为 5 m.

（1）建立适当的直角坐标系，求这条抛物线的表达式.

（2）求立柱 EF 的长.

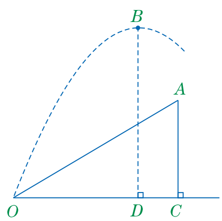
（3）拱桥下面拟铺设行车道，要保证高 3 m 的汽车能够通过（车顶与桥拱的距离不小于 0.3 m），行车道最宽可铺设多少米?

B 组

如图，一高尔夫球员从山坡下的点 O 处打出一球，球向山坡上的球洞点 A 处飞去，球的飞行路线为抛物线. 如果不考虑空气阻力，当球达到最大高度12 m时，球移动的水平距离为 9 m. 已知山坡 OA 与水平方向 OC 的夹角为 30°，O，A 两点间的距离为 $8\sqrt{3}$ m.

（1）建立适当的直角坐标系，求球的飞行路线所在抛物线的函数表达式.

（2）这一杆能否把高尔夫球从点 O 处直接打入点 A 处球洞?



对于二次函数 $y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$来说，当 $a>0$，且 $x=-\dfrac{b}{2a}$时，$y_{最小}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$，且 $x=-\dfrac{b}{2a}$时，$y_{最大}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$. 二次函数的这一特征，使它成为解决许多求“最小值”或“最大值”问题的重要工具.

习　题

A 组

1.0.6.

2.(1)建立不同的直角坐标系，求得的表达式不同. 以拱桥的最高点为坐标原点，水平方向为 x 轴建立直角坐标系，求得的函数表达式为 $y=-\dfrac{3}{50}x^2$.

(2)3.5 m.

(3)13.4 m.

B 组

(1)以 D 为坐标原点，直线 DC 为 x 轴建立直角坐标系，求得的函数表达式为 $y=-\dfrac{4}{27}x^2+12$.

(2)当 $x=3$ 时，$y=\dfrac{32}{3}>4\sqrt{3}$，因此不能直接打入球洞点 A 处.

做一做

(1) $y=\frac{1}{50}x^2-\frac{8}{5}x+97$.

(2) 40°.

例 2 用总长度为 24 m 的不锈钢材料制成如图 30－4－6 所示的外观为矩形的框架，其横档和竖档分别与 AD，AB 平行. 设 $AB=x$ m，当 x 为多少时，矩形框架 $ABCD$ 的面积 S 最大？最大面积是多少平方米？

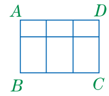


图 30－4－6

解：$\because$ $S=\frac{24-4x}{3}\cdot x=-\frac{4}{3}x^2+8x=-\frac{4}{3}(x-3)^2+12$，

$a=-\frac{4}{3}<0$，

$\therefore$ 当 $x=3$ 时，S 有最大值，且 $S_{最大}=12\ m^2$.

答：当 $x=3$ 时，矩形框架 $ABCD$ 的面积最大，最大面积为 12 m².

例 3 一工艺师生产的某种产品按质量分为 9 个档次. 第 1 档次（最低档次）的产品一天能生产 80 件，每件可获利润 12 元. 产品每提高一个档次，每件产品的利润增加 2 元，但一天产量减少 4 件. 如果只从生产利润这一角度考虑，他生产哪个档次的产品，可获得最大利润？

解：设生产 x 档次的产品时，每天所获得的利润为 w 元，则

$$\begin{aligned}w&=[12+2(x-1)][80-4(x-1)]\\&=(10+2x)(84-4x)\\&=-8x^2+128x+840\\&=-8(x-8)^2+1\,352.\end{aligned}$$

当 $x=8$ 时，w 有最大值，且 $w_{最大}=1\,352$.

答：该工艺师生产第 8 档次的产品，可使每天获得的利润最大，最大利润为 1 352 元.

做一做

某种燃气灶的开关旋钮可从 0° 旋转到 90°. 为测试开关旋钮在不同角度的燃气用量，在相同条件下，用开关旋钮的 5 个不同角度分别烧开一壶水，得到下列对应值：

开关旋钮旋转过的角度	20°	50°	70°	80°	90°
烧开一壶水所用燃气量/dm³	73	67	83	97	115

（1）若所用燃气量是开关旋钮转过角度的二次函数，求这个二次函数的表达式.

（2）当开关旋钮转过多少度时，烧开一壶水所用燃气量最少？

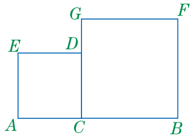
44 | 数学　九年级下册

＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊ ＊

教学建议

本节课的内容是利用二次函数求实际问题中的最大(或最小)值，这个最大(或最小)值实际上就是二次函数图像的顶点的纵坐标.这类问题，没有直接的二次函数(或抛物线)模型，需要把实际问题抽象成二次函数问题，即把问题中变量间的关系用表达式表示出来，确定是二次函数，再用二次函数的知识去解决.这时就需要弄清题意，理清变量间的关系，求出表达式.这也是学生容易感到困惑的地方，因此，教师要加以引导、帮助，学生间要多合作交流.

练 习



如图，已知 $AB=2$，点 C 在线段 AB 上，四边形 $ACDE$ 和四边形 $CBFG$ 都是正方形．设 $BC=x$．

（1）$AC=$________．

（2）设正方形 $ACDE$ 和正方形 $CBFG$ 的总面积为 S，用 x 表示 S 的函数表达式为 $S=$________．

（3）总面积 S 有最大值还是最小值？这个最大值或最小值是多少？

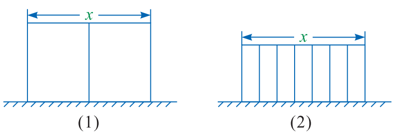
（4）当总面积 S 取最大值或最小值时，点 C 在 AB 的什么位置？

习 题

A 组

1. 用 60 m 长的篱笆围成一个一边靠墙、中间用篱笆隔开的矩形养鸡场．

（1）如果中间只有一道篱笆，如图(1)，并设矩形一边长为 x m，那么当 x 为何值时，养鸡场的面积最大？



（第 1 题）

（2）如果养鸡场中间有 6 道篱笆，如图(2)，并设矩形一边长为 x m，那么当 x 为何值时，养鸡场的面积最大？

2. 某产品的成本是 120 元/件，在试销阶段，当产品的售价为 x(元/件)时，日销量为 $(200-x)$件．

（1）写出用售价 x(元/件)表示每日的销售利润 y(元)的表达式．

（2）当日销售利润是 1 500 元时，产品的售价是多少？日销量是多少件？

（3）当售价定为多少时，日销售利润最大？最大日销售利润是多少元？

练 习

(1)$2-x(0<x<2)$．

(2)$2x^2-4x+4$．

(3)有最小值，$S=2$．

(4)C 是 AB 的中点．

习 题

A 组

1.(1)$S=-\frac{1}{3}x^2+20x$，当 $x=30$ 时，养鸡场的面积最大．

(2)$S=-\frac{1}{8}x^2+\frac{15}{2}x$，当 $x=30$ 时，养鸡场的面积最大．

2.(1)$y=-x^2+320x-24\ 000$．

(2)170 元/件或 150 元/件；30 件或 50 件．

(3)160 元/件；1 600 元．

B 组

1.(1)1 633 m^2.

(2)当 $HE=\frac{20}{3}$ m 时，休闲广场的面积最大，最大面积为 $\frac{4\ 900}{3}$ m^2.

2. $y=-20x^2+400x-1\ 500$，单价为 10 角时，利润最大，最大利润为 500 角.

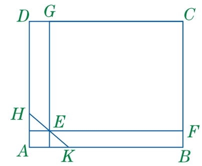
做一做

(1)甲车刹车前的速度为 30 km/h，甲车没有违章超速.

(2)乙车速度的范围为 40 km/h$<x<$48 km/h，乙车违章超速.

B 组

1. 某社区为了美化环境，准备在一块矩形土地 $ABCD$ 上修建一个矩形休闲广场 $EFCG$. 为了使三角形文物保护区 AKH 不被破坏，休闲广场的顶点 E 不能在文物保护区内. 已知 $AB=52$ m，$AD=40$ m，$AK=12$ m，$AH=9$ m.



(第 1 题)

(1) 当 E 为 HK 的中点时，休闲广场的面积是多少平方米？

(2) 当点 E 在 HK 上什么位置时，休闲广场的面积最大？最大面积是多少平方米？

2. 某食品零售店为食品厂代销一种面包，未售出的面包可退回厂家. 统计销售情况时发现，当这种面包的价格定为 7 角/个时，每天可卖出160 个. 在此基础上，这种面包的单价每提高 1 角，该零售店每天就会少卖出 20 个. 已知该零售店每个面包的成本是 5 角. 当面包单价定为多少角时，该零售店每天销售这种面包获得的利润最大？最大利润为多少？

做一做

汽车在行驶中，由于惯性作用，刹车后还要向前滑行一段距离才能停住，这段距离叫做刹车距离. 刹车距离是分析和处理道路交通事故的一个重要因素. 有一个道路交通事故案例：甲、乙两车在限速为 40 km/h 的湿滑弯道上相向而行，待望见对方，同时刹车时已经晚了，两车还是相撞了. 事后经现场勘察，测得甲车的刹车距离为 12 m，乙车的刹车距离超过 10 m，但小于 12 m. 根据有关资料，在这样的湿滑路面上，甲车的刹车距离 $s_{甲}$(m)与车速 x(km/h)之间的关系为 $s_{甲}=0.1x+0.01x^2$，乙车的刹车距离 $s_{乙}$(m)与车速 x(km/h)之间的关系为 $s_{乙}=\frac{1}{4}x$.

(1) 甲车刹车前的行驶速度是多少千米/时？甲车是否违章超速？

(2) 乙车刹车前的行驶速度在什么范围内？乙车是否违章超速？

* * * * * * * * * * * *

教学建议

二次函数与一元二次方程有着紧密的联系，已知函数 y 取某个值 m，求相应的自变量 x 的值时，实际上就是把二次函数问题转化为一元二次方程问题.从图像上看，就是求直线 $y=m$ 与二次函数图像的交点坐标.

1.在“做一做”中，经历“实际问题—二次函数问题—一元二次方程问题”的过程，体会二次函数与一元二次方程的联系.

2.例 4 是一个几何问题，但需转化为代数问题来求解，本题是通过建立函数关系式，转化为二次函数问题，再进而转化为一元二次方程问题.其中(1)也可以转化为一元二次方程问题来求解.

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的某一个函数值 $y=m$，就可利用一元二次方程 $ax^2+bx+c=m$ 确定与它对应的 x 的值.

例 4 如图 30－4－7，已知边长为 1 的正方形 $ABCD$，在 BC 边上有一动点 E，连接 AE，作 $EF\perp AE$，交 CD 边于点 F.

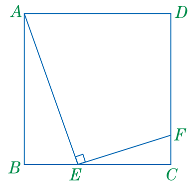


图 30－4－7

（1）CF 的长可能等于 $\frac{3}{4}$ 吗？

（2）点 E 在什么位置时，CF 的长为 $\frac{3}{16}$？

解：设 $BE=x$，$CF=y$.

$\because$ $\angle BAE=\angle CEF$，

$\therefore$ $\mathrm{Rt}\triangle ABE\backsim \mathrm{Rt}\triangle ECF$.

$\therefore$ $\frac{BE}{CF}=\frac{AB}{EC}$，即 $\frac{x}{y}=\frac{1}{1-x}$.

$\therefore$ $y=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$.

（1）$\because$ $y_{最大}=\frac{1}{4}$，

$\therefore$ CF 的长不可能等于 $\frac{3}{4}$.

（2）设 $-x^2+x=\frac{3}{16}$，即 $16x^2-16x+3=0$.

解得 $x_1=\frac{1}{4}$，$x_2=\frac{3}{4}$.

$\therefore$ 当 BE 的长为 $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$ 时，均有 CF 的长为 $\frac{3}{16}$.

练 习

当路况良好时，在干燥的路面上，某种汽车的刹车距离 s(m) 与车速 v(km/h) 之间的关系如下表：

v/(km/h)	…	40	60	80	100	120	…
s/m	…	2	4.2	7.2	11	15.6	…

练 习

(1)略.

(2)略.

(3)$v=90$ km/h.

习 题

A 组

1.(1)10 m.

(2)不能,铅球行进最大高度为 3 m.

2.(1)$y=-100x+10\ 000$.

(2)$w=-100x^2+16\ 000x-600\ 000$.

(3)80 元/件.

(1) 在平面直角坐标系中描出每对(v, s)所对应的点，并用平滑的曲线顺次连接各点.

(2) 利用图像验证刹车距离 s(m)与车速 v(km/h)是否具有如下关系：

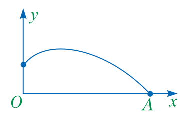
$$s=\frac{1}{1\ 000}v^2+\frac{1}{100}v.$$

(3) 求 $s=9$ m 时的车速 v.

习 题

A 组

1. 如图，一名男生推铅球，铅球行进高度 y(m)与水平距离 x(m)之间的关系为 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$.



(第 1 题)

(1) 求铅球被推出的水平距离.

(2) 通过计算判断铅球行进高度能否达到 4 m.

2. 某工艺品厂生产一款工艺品. 已知这款工艺品的生产成本为 60 元/件. 经市场调研发现，这款工艺品每天的销售量 y(件)与售价 x(元/件)之间存在着如下表所示的一次函数关系：

售价 x/(元/件)	…	70	90	…
销售量 y/件	…	3 000	1 000	…

(1) 求销售量 y(件)与售价 x(元/件)之间的函数关系式.

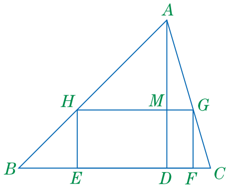
(2) 求每天的销售利润 w(元)与售价 x(元/件)之间的函数关系式.

(3) 如何定价才能使该工艺品厂每天获得的销售利润为 40 000 元?

* * * * * * * * * * *

B 组

如图，$\triangle ABC$ 是一块铁皮余料. 已知底边 $BC=160$ cm，高 $AD=120$ cm. 在铁皮余料上截取一个矩形 $EFGH$，使点 H 在 AB 上，点 G 在 AC 上，点 E，F 在 BC 上，AD 交 HG 于点 M.



(1) 设 $HG=y$ cm，$HE=x$ cm，试确定用 x 表示 y 的函数表达式.

(2) 当 x 为何值时，矩形 $EFGH$ 的面积 S 最大?

(3) 以面积最大时的矩形 $EFGH$ 为侧面，围成一个无底圆桶，怎样围，圆桶的体积较大? 请说明理由. (接缝处忽略不计，结果可保留 π)

B 组

(1) $y=-\dfrac{4}{3}x+160$.

(2) $x=60$ 时，面积最大.

(3) 当 $x=60$ 时，$y=80$.

如果以 $HE=60$ cm 作为圆桶的高，那么圆桶的体积为 $\dfrac{96\ 000}{\pi}$ cm^3.

如果以 $HG=80$ cm 作为圆桶的高，那么圆桶的体积为 $\dfrac{72\ 000}{\pi}$ cm^3.

因此，以 HE 为圆桶的高，围成的圆桶体积较大.

教学目标

1.进一步理解二次函数与一元二次方程的关系.

2.会利用二次函数的图像求一元二次方程的近似解.从解的精确度上初步体会逼近的思想.

观察与思考

(1)有两个交点,有一个交点,不相交.

(2)有两个不相等的根,有两个相等的根,无解.

(3)对应的关系.

30.5 二次函数与一元二次方程的关系

二次函数和一元二次方程有着紧密的联系.现在,我们就来探究它们之间的关系.

观察与思考

如图 30-5-1,已知同一直角坐标系中抛物线 $y=x^2+2x-3$,$y=x^2-6x+9$,$y=x^2-4x+6$.

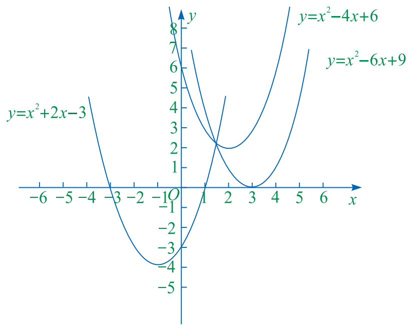


图 30-5-1

(1) 这三条抛物线和 x 轴相交(或不相交)的情况分别是怎样的?

(2) 当 $y=0$ 时,这三条抛物线的表达式对应的方程分别是 $x^2+2x-3=0$,$x^2-6x+9=0$,$x^2-4x+6=0$,它们根的情况分别是怎样的?

(3) 上述三个方程根的情况与它们所对应的三条抛物线和 x 轴相交(或不相交)的情况具有怎样的关系?

一般地,抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 和 x 轴相交(或不相交)的情况与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的情况有如下对应关系:

* * * * * * * * * * *

教学建议

1.二次函数图像与 x 轴的交点的横坐标,就是当二次函数的值为 0 时自变量的值.这样,二次函数的问题就转化为一元二次方程问题了.因此,一元二次方程根的判别式也是判别二次函数图像与 x 轴交点情况的条件.“观察与思考”可以从图像上直观观察发现,也可以通过对表达式进行分析而得到.

2.一元二次方程的近似解法与用一元二次方程求根公式求解有本质上的区别,后者是把它的解用公式精确地表示出来,前者则是利用逐渐逼近的数学思想方法.对于一些无法用公式求解的方程,这种方法是很有效的.应让学生在“做”的过程中体会这种思想.

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的位置关系	有两个公共点	有一个公共点	无公共点
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的情况	有两个不相等的实根	有两个相等的实根	没有实根

做一做

不画图像，说明下列抛物线和 x 轴相交(或不相交)的情况.

(1) $y=x^2-2x-1$； (2) $y=-2x^2+7x-7$； (3) $y=4x^2-12x+9$.

根据抛物线和 x 轴相交(或不相交)的情况与其对应的一元二次方程根的情况的关系，以及二次函数随自变量增大而增大(或减小)的性质，可以借助二次函数来求一元二次方程根的近似值.

例 求方程 $x^2-2x-6=0$ 较小根的近似值.（结果精确到 0.1）

解：如图 30－5－2，画出二次函数 $y=x^2-2x-6$ 的图像.

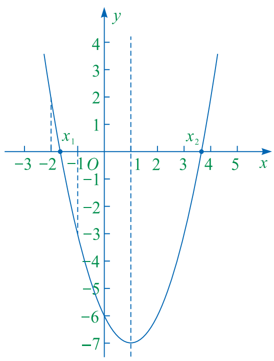


图 30－5－2

观察画出的抛物线，设它与 x 轴的交点的横坐标为 x_1 和 x_2，不妨设 $x_1<x_2$.

现在来求 x_1 的近似值.

(1) 容易看出：

当 $x=-2$ 时，$y>0$；当 $x=-1$ 时，$y<0$，且在 $-2<x<-1$

做一做

(1)有两个交点；

(2)不相交；

(3)有一个交点.

范围内，y 随 x 的增大而减小，所以

$$-2<x_1<-1.$$

(2) 取-2和-1的中间数-1.5(中间数为$\frac{-2-1}{2}$)，代入表达式中试值.

当$x=-1.5$时，$y=(-1.5)^2-2\times(-1.5)-6=-0.75<0$；当$x=-2$时，$y>0$. 在$-2<x<-1.5$范围内，$y$随$x$的增大而减小，所以

$$-2<x_1<-1.5.$$

(3) 取-2和-1.5的中间数-1.75，代入表达式中试值.

当$x=-1.75$时，$y=(-1.75)^2-2\times(-1.75)-6=0.5625>0$；当$x=-1.5$时，$y<0$. 在$-1.75<x<-1.5$范围内，$y$随$x$的增大而减小，所以

$$-1.75<x_1<-1.5.$$

(4) 取-1.75和-1.5的中间数-1.625，代入表达式中试值.

当$x=-1.625$时，$y=(-1.625)^2-2\times(-1.625)-6=-0.109375<0$；当$x=-1.75$时，$y>0$. 在$-1.75<x<-1.625$范围内，$y$随$x$的增大而减小，所以

$$-1.75<x_1<-1.625.$$

$x_1\approx-1.7$即为精确到0.1的近似值.

练　习

求例题中x_2精确到0.1的近似值.

习　题

A　组

1. 指出下列函数的图像与x轴相交（或不相交）的情况，并说明理由.

(1) $y=2x^2-3x$；　(2) $y=-x^2+8x-16$；

(3) $y=3x^2+6x+4$；　(4) $y=\frac{1}{2}x^2-x+3$.

练　习

$x_2\approx3.6$.

习　题

A 组

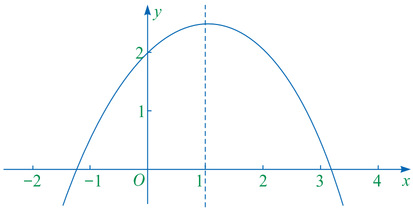
1.(1)$\Delta>0$,有两个交点；

(2)$\Delta=0$,有一个交点；

(3)$\Delta<0$,不相交；

(4)$\Delta<0$,不相交.

2. 利用二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+2$ 的图像和性质，求方程 $-\frac{1}{2}x^2+x+2=0$ 在 3 和 4 之间的根的近似值.（结果精确到 0.1）



（第 2 题）

B 组

1. 求方程 $x^2-2x-2=0$ 的一个根的近似值.（结果精确到 0.1）

2. 借助 A 组第 2 题的图像，求方程 $-\frac{1}{2}x^2+x+2=0$ 在 -2 和 -1 之间的根的近似值.（结果精确到 0.1）

2. $x\approx3.2$.

B 组

1. $x_1\approx2.7$，$x_2\approx-0.7$.

2. $x\approx-1.2$.

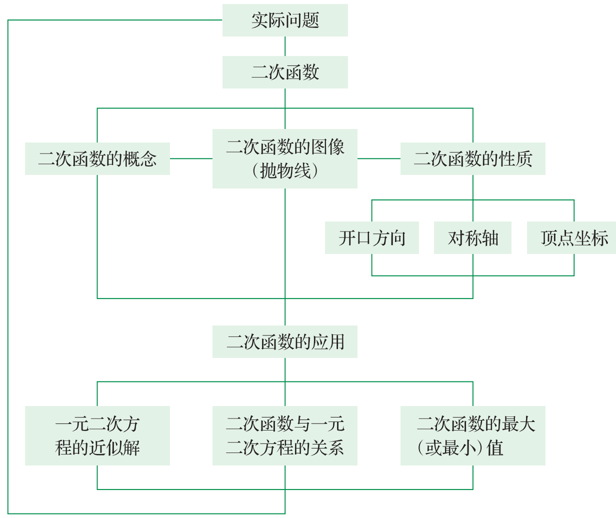
教学目标

1.回顾本章内容，进一步理解二次函数的图像和性质，体会模型思想，体会知识间的内在联系，形成数学知识的整体性.

2.形成回顾与反思的习惯，培养反思的意识，提高概括和归纳能力.

回顾与反思

一、知识结构



二、总结与反思

二次函数是又一类重要的函数模型．借助二次函数的图像，可以直观地了解二次函数的性质，并解决一些简单的实际问题．这充分体现了“数形结合”的重要思想.

1．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像是一条抛物线，这条抛物线关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称，它的顶点坐标为$\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$．当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，两侧向上无限延伸，顶点是最低点；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，两侧向下无限延伸，顶点是最高点.

2．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质可通过它的图像反映出来．回忆并填空：

当 $a>0$ 时，在对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 的左侧，y 随 x 的增大而________；在

* * * * * * * * * * *

教学建议

1.让学生回顾本章知识形成与发展的脉络，画出本章的知识结构图，教师可给予适当的引导，然后进行交流.要给学生留出充足的时间，不要以讲授代替学生的思考.

2.在上述基础上，可以分专题总结.如正比例函数、一次函数、反比例函数和二次函数作为一个专题，本章中体现的函数思想、数形结合思想、模型思想、待定系数法、配方法等数学思想方法作为一个专题，也可对研究二次函数图像的“特殊——一般”的方法作为一个专题，还可以把二次函数的应用或二次函数与一元二次方程的关系作为一个专题.这样会使学生解决问题的能力有一个提升.

对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 的右侧，y 随 x 的增大而________；当 $x=$________时，$y_{最小}=$________.

当 $a<0$ 时，在对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 的左侧，y 随 x 的增大而________；在对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$ 的右侧，y 随 x 的增大而________；当 $x=$________时，$y_{最大}=$________.

3. 用待定系数法求二次函数的表达式，可以用不同的方法：一是已知三点的坐标，将其代入一般表达式 $y=ax^2+bx+c$ 中，求解关于 a，b，c 的三元一次方程组即可；二是已知两点的坐标和对称轴，将其代入表达式 $y=a(x-h)^2+k$中，即可求得.

4. 求一元二次方程的近似解，是利用一元二次方程与二次函数的关系，借助二次函数的图像确定一元二次方程解的范围，通过逐步逼近，直到找到符合精度要求的近似解为止.

5. 在用二次函数解决实际问题时，首先要对实际问题进行观察和分析，梳理并表达出相应的数量关系，以确定二次函数的表达式，进而利用二次函数的图像或性质解决实际问题.

三、注意事项

1. 在画二次函数的图像时，要在对称轴的两侧对称地选取若干个点.

2. 在解决与抛物线有关的实际问题时，要注意建立恰当的直角坐标系.

3. 在利用二次函数解决实际问题时，自变量的取值范围需要结合具体问题来确定.

复 习 题

A 组

1. 分别在同一直角坐标系内画出下列各组二次函数的图像，并根据图像写出抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标.

(1) $y=-\frac{1}{3}x^2+2$ 与 $y=-\frac{1}{3}x^2-2$.

(2) $y=\frac{1}{4}(x+1)^2$ 与 $y=\frac{1}{4}(x-1)^2$.

复习题

A 组

1. 略.

2.略.

3.图像略.

(1)直线 $x=1$,$(1,4)$,与 x 轴的交点坐标为 $(-1,0)$,$(3,0)$,与 y 轴的交点坐标为 $(0,3)$.

(2)当 $x<1$ 时,y 随 x 的增大而增大;当 $x>1$ 时,y 随 x 的增大而减小.

(3)当 $-1<x<3$ 时,$y>0$.

(4)当 $x<-1$ 或 $x>3$ 时,$y<0$.

4.1,-8.

5.(1)$y=-x^2-4x$.

(2)$y=-x^2+4x-3$.

(3)$y=x^2-2x-3$.

6.(1)$y=-x^2+2x+2$.

(2)略.

7.$x\approx 2.3$.

8.(1)$y=-\pi x^2+64\pi$.

(2)$x=4\sqrt{2}$.

(3) $y=\frac{1}{3}(x+1)^2+3$ 与 $y=-\frac{1}{3}(x+1)^2+3$.

2. 写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标，并指出二次函数的最大(或最小)值.

(1) $y=x^2+2x-3$；　　(2) $y=-x^2+6x+2$；

(3) $y=2x^2-3x+5$；　　(4) $y=5x^2+6x$.

3. 画出二次函数 $y=-x^2+2x+3$ 的图像，并根据图像解答下列问题.

(1) 写出抛物线的对称轴、顶点坐标、与 x 轴和 y 轴的交点坐标.

(2) 当 x 在什么范围内时，y 随 x 的增大而增大？当 x 在什么范围内时，y 随 x 的增大而减小？

(3) 当 x 在什么范围内时，$y>0$？

(4) 当 x 在什么范围内时，$y<0$？

4. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的部分对应值如下表：

x	…	-3	-2	0	1	3	5	…
y	…	7	0	-8	-9	-5	7	…

则它的图像的对称轴为 $x=$________；当 $x=2$ 时，对应的函数值 $y=$________.

5. 根据下列条件，求出抛物线的表达式.

(1) 抛物线 $y=ax^2-4x+c$ 经过原点，与 x 轴交于另一点 $D(-4,0)$.

(2) 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的顶点坐标为 $(2,1)$.

(3) 抛物线 $y=ax^2+bx-3$ 经过点 $A(1,-4)$ 和 $B(2,-3)$.

6. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点 $A(-1,-1)$，$B(0,2)$，$C(1,3)$.

(1) 求这个二次函数的表达式.

(2) 画出这个二次函数的图像.

7. 求一元二次方程 $x^2+2x-10=0$ 正根的近似值.(结果精确到 0.1)

8. 在半径为 8 cm 的大圆中，挖去一个半径为 x cm 的小圆，剩下部分的面积为 y cm^2.

(1) 请写出用 x 表示 y 的函数表达式.

(2) 当 x 为何值时，剩下部分的面积是原来大圆面积的一半？

* * * * * * * * * * *

9. 小明要制作一个三角形的钢架模型．在这个三角形中，长为 x cm 的边与这条边上的高之和为 60 cm．设这个三角形的面积为 S cm^2．

(1) 请写出 S 与 x 之间的函数关系式．

(2) 当 x 等于多少时，这个三角形的面积 S 最大？最大面积是多少平方厘米？

10. 某种爆竹点燃后，其上升的高度 h(m)和时间 t(s)符合关系式 $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2(0<t\leqslant 2)$．这种爆竹点燃后以 $v_0=20$ m/s 的初速度上升，g 取 10 m/s^2．

(1) 这种爆竹在地面上点燃后，经过多长时间距地面 15 m？

(2) 在爆竹点燃后的 1.5 s 至 1.8 s 这段时间内，爆竹是上升还是下降？请说明理由．

B 组

1. 已知二次函数的图像过点$\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$，顶点坐标为(−1，2)．

(1) 求这个二次函数的表达式．

(2) 求证：对任意实数 m，点 $M(m,\ -m^2)$都不在这个二次函数的图像上．

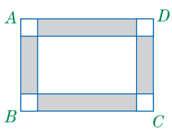
2. 抛物线 $y=-x^2+2nx+n^2-9$(n 为常数)经过坐标原点且顶点在第一象限．试确定该抛物线所对应的函数关系式，并写出其顶点坐标．

3. 某汽车租赁公司现有汽车 100 辆．当每辆汽车的月租金为 3 000 元时，能够全部租出；每辆汽车的月租金每提高 50 元，不能租出的汽车将增加 1 辆．每辆未租出的汽车月维护费为 100 元．

(1) 请用每辆汽车的月租金 x(元)表示汽车租赁公司的月收益 y(元)．

(2) 当每辆汽车的月租金为多少元时，汽车租赁公司的月收益最大？最大月收益是多少元？

4. 现用地砖铺设长方形广场的地面 $ABCD$，已知长方形广场地面的长为 100 m，宽为 80 m．图案设计如图所示，广场的四角均为小正方形，阴影部分为四个长方形，四个长方形的宽都等于小正方形的边长．阴影部分铺绿色地砖，其余部分铺白色地砖．



(第 4 题)

9.(1)$S=-\frac{1}{2}x^2+30x$.

(2)30,450 cm^2.

10.(1)1 s,3 s.

(2)$h=-5(t-2)^2+20$,当 $t=2$ s 时,爆竹高度达到最高.因此,在 1.5 s 至 1.8 s 这段时间内爆竹是上升的.

B 组

1.(1)$y=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}$.

(2)把点 $M(m,-m^2)$代入函数表达式中,整理得 $m^2-2m+3=0$.这个方程的判别式 $\Delta=(-2)^2-4\times1\times3<0$.所以方程无解.即对任意实数 m,点 $M(m,-m^2)$都不在这个二次函数图像上.

2.$y=-x^2+6x$,顶点坐标为(3,9).

3.(1)$y=-\frac{1}{50}x^2+158x+6\ 000$.

(2)3 950 元,318 050 元.

* * * * * * * * * * *

4.(1)设小正方形的边长为 x m,则铺设白色地砖部分的面积为 $S=8x^2-360x+8\ 000$,当 $S=5\ 200$ 时,$x_1=10$,$x_2=35$(舍去),因此长方形广场四角小正方形的边长为 10 m.

(2)铺设广场地面的总费用为 $w=80x^2-3\ 600x+240\ 000$,当 $x=22.5$ 时,w 最小,且 $w=199\ 500$.因此,小正方形的边长为 22.5 m 时,铺设广场地面费用最少,最少费用是 199 500 元.

C 组

1.(1)$S_{\triangle PEF}=-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x(0<x<2)$.

(2)点 P 到点 B 的距离为 1 时,$S_{\triangle PEF}$ 最大,最大值为$\frac{1}{4}$.

2.(1)1,6,15,28.

(2)$s=2n^2-n$.

(3)当 $n=10$ 时,$s=190$.

(4) 存在,第 30 个图形.

(1) 如果要使铺白色地砖的面积为 5 200 m^2,那么长方形广场四角的小正方形的边长应为多少米?

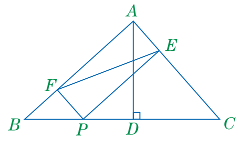
(2) 如果铺白色地砖需要的费用为 30 元/平方米,铺绿色地砖需要的费用为20 元/平方米,那么当广场四角小正方形的边长为多少米时,铺广场地面的总费用最少?最少费用是多少元?

C 组

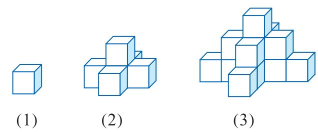
1. 如图,在$\triangle ABC$ 中,$BC=2$,BC 边上的高 $AD=1$,P 是 BC 边上任意一点,$PE/\!/AB$,交 AC 于点 E,$PF/\!/AC$,交 AB 于点 F. 设 $BP=x$,$\triangle PEF$ 的面积为 $S_{\triangle PEF}$.

(1) 写出用 x 表示 $S_{\triangle PEF}$ 的表达式.

(2) x 为何值时,$S_{\triangle PEF}$ 最大?



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 用同样大小的正方体木块依次堆放成如图(1)、图(2)、图(3)所示的实心几何体,并按照这样的规律继续堆放下去. 设第 n 个图形中含有正方体木块 s 个.

(1) 填表:

n	1	2	3	4	…
s					…

(2) 已知 s 是 n 的二次函数,求这个二次函数的表达式.

(3) 第 10 个图形中的正方体木块有多少个?

(4) 是否存在某个图形,它对应的几何体由 1 770 个正方体木块组成?若存在,指出它是第几个图形;若不存在,请说明理由.

58 | 数学 九年级下册