

第十一章

因式分解

在本章中，我们将学习

- 因式分解
- 用提公因式法分解因式
- 用公式法分解因式

整式乘法 \longleftrightarrow 因式分解

多 项式乘法是把几个整式的乘积化为一个多项式。反过来，你能将一个多项式分解成几个整式乘积的形式吗？

$$ma + mb = m(a + b)$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$



11.1 因式分解

在小学阶段，我们由数的乘法运算获得启发，建立了因数的概念。类似地，我们是否可以探索从整式的乘法获得类似“因数”的概念呢？



观察与思考

观察下面计算 $2\ 011^2 - 2\ 011 \times 2\ 010$ 和 $37^2 - 36^2$ 的过程，哪种更简便？

小明的方法

$$\begin{aligned} & 2\ 011^2 - 2\ 011 \times 2\ 010 \\ &= 4\ 044\ 121 - 4\ 042\ 110 \\ &= 2\ 011. \\ & 37^2 - 36^2 \\ &= 1\ 369 - 1\ 296 \\ &= 73. \end{aligned}$$

小亮的方法

$$\begin{aligned} & 2\ 011^2 - 2\ 011 \times 2\ 010 \\ &= 2\ 011 \times (2\ 011 - 2\ 010) \\ &= 2\ 011. \\ & 37^2 - 36^2 \\ &= (37 + 36)(37 - 36) \\ &= 73. \end{aligned}$$

小亮的方法是运用了乘法对加法的分配律以及平方差公式，运算较简单。

现在，我们来研究多项式的因式分解问题。

由整式的乘法运算，我们知道：

$$x(x-2) = x^2 - 2x, \quad (x+y)(x-y) = x^2 - y^2, \quad (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1.$$

反过来，可以把这些多项式写成整式乘积的形式：

$$x^2 - 2x = x(x-2), \quad x^2 - y^2 = (x+y)(x-y), \quad x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2.$$

像这样，把一个多项式分解成几个整式乘积的形式，叫做多项式的**因式分解**(factorization)，也叫做将多项式**分解因式**(factoring)。其中每个整式都叫做这个多项式的**因式**。



大家谈谈

1. 多项式相乘的结果是什么？
2. 一个多项式进行因式分解的结果是什么？

因式分解的结果是几个整式乘积的形式。

多项式的因式分解与乘法运算是不同的. 多项式的因式分解是把一个多项式化成几个整式的乘积, 而多项式的乘法运算是把几个整式的乘积化成一个多项式.

多项式的因式分解与多项式的乘法运算是相反的变形过程.

$$\begin{array}{ccc} \frac{(x+y)(x-y)=x^2-y^2}{\text{多项式 } x+y \text{ 与 } x-y \text{ 的乘积为 } x^2-y^2} & & \frac{x^2-y^2=(x+y)(x-y)}{\text{多项式 } x^2-y^2 \text{ 分解为 } x+y \text{ 与 } x-y \text{ 的乘积}} \end{array}$$



做一做

- 下列各式中, 从等号左边到右边的变形, 哪些是多项式的因式分解?
 (1) $x^2-4=(x+2)(x-2)$; (2) $x^2+4x+4=(x+2)^2$;
 (3) $7m+14n=7(m+2n)$; (4) $x(y+1)=xy+x$.
- 下列对多项式的变形, 哪些是因式分解? 是因式分解的, 指出它的各因式.
 (1) $x^2-x=x(x-1)$; (2) $10x+5y=5(2x+y)$;
 (3) $a^2-1=(a+1)(a-1)$; (4) $x^2-2x+1=(x-1)^2$.



练习

- 下列各式从等号左边到右边的变形, 哪些是因式分解?
 (1) $(m+n)(m-n)=m^2-n^2$; (2) $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$;
 (3) $5a+10b=5(a+2b)$; (4) $x^2-2x+1=x(x-2)+1$.
- 请将下列等式左边多项式的另一个因式填在括号里:
 (1) $2x+4=2(\quad)$; (2) $x-xy=x(\quad)$;
 (3) $16x^2-1=(4x+1)(\quad)$; (4) $a^2+6a+9=(a+3)(\quad)$.



习题

- 对下列各式所进行的因式分解正确吗? 如果不正确, 请改正过来.
 (1) $ab-b=b(a-1)$; (2) $-10x-10=-10(x-1)$;
 (3) $3x+3y=3(x+y)$; (4) $m^2+4m+4=m^2+4(m+1)$.
- 请将下列等式左边多项式的另一个因式填在括号里:
 (1) $2R-2r=2(\quad)$; (2) $3mn-6nx=(\quad)(m-2x)$;
 (3) $3ax+3ay=3a(\quad)$; (4) $10ax-15xy+5x=5x(\quad)$.

11.2 提公因式法

提公因式法在进行多项式因式分解的最基本方法之一. 用提公因式法分解因式的关键是确定多项式的公因式.



观察与思考

1. 多项式 $ma+mb+mc$ 有几项? 每一项的因式都有哪些? 这些项中有没有公共的因式? 若有, 是哪个?
2. 多项式 ab^2-2a^2b 的两项中, 有没有公共的因式? 若有, 是哪些?

实际上, 有:

多项式	项	各项的公共因式
$ma+mb+mc$	ma, mb, mc	m
ab^2-2a^2b	$ab^2, -2a^2b$	a, b, ab

一般地, 多项式的各项都含有的因式, 叫做这个多项式各项的公因式(common factor), 简称多项式的公因式.

逆用乘法对加法的分配律, 可以把公因式写在括号外边, 作为积的一个因式, 写成下面的形式:

$$ma+mb+mc=m(a+b+c),$$

$$ab^2-2a^2b=ab(b-2a).$$

这种将多项式分解因式的方法, 叫做提公因式法.



做一做

1. 写出下列多项式的公因式:

(1) $6x-9x^2$;

(2) $abc+2a$;

(3) $abc-ab^2+2ab$;

(4) $2x^2y+4xy^2-6xy$.

2. 先指出下列多项式的公因式, 再进行因式分解:

(1) x^2+2x ;

(2) $2x^2+4x$;

(3) $2a^2x-6ax^2$;

(4) $4a^4-12a^3+16a^2$.



大家谈谈

在“做一做”中, 三名同学对多项式 $2x^2+4x$ 分解因式的结果如下:

(1) $2x^2+4x=2(x^2-x)$;

(2) $2x^2+4x=x(2x+4)$;

(3) $2x^2+4x=2x(x+2)$.

请你谈谈用提公因式法分解因式应注意的问题.

一般地, 当多项式的各项系数都是整数时, 公因式的系数应取各项系数的最大公约数, 字母应取各项相同的字母, 且相同字母的指数取次数最低的.

例 1 把下列多项式分解因式:

(1) $-3x^2+6xy-3xz$; (2) $3a^3b+9a^2b^2-6a^2b$.

解: (1) $-3x^2+6xy-3xz$
 $=(-3x) \cdot x + (-3x) \cdot (-2y) +$
 $(-3x) \cdot z$
 $=-3x(x-2y+z)$.

(2) $3a^3b+9a^2b^2-6a^2b$
 $=3a^2b \cdot a + 3a^2b \cdot 3b - 3a^2b \cdot 2$
 $=3a^2b(a+3b-2)$.

公因式的系数是负数时, 提公因式后各项要变号.



做一做

把 $5ab^3-10b^2c+5b^2$ 分解因式.

例 2 分解因式: $2a(b+c)-5(b+c)$.

解: $2a(b+c)-5(b+c)$
 $=(b+c) \cdot 2a - (b+c) \cdot 5$
 $=(b+c)(2a-5)$.

把 $b+c$ 看成一个整体“提”出来.



练习

1. 把下列各式分解因式:

(1) $5a+5b$;

(2) m^2+m ;

(3) x^2+2x ;

(4) $3xy+3xz$.

2. 把下列多项式的公因式和分解因式的结果填入表格中:

多项式	公因式	分解因式的结果
$5a^2+10a^2bc$		
$12xyz-9x^2y^2$		
$2x^2+4xy-6x$		

3. 把下列各式分解因式:

(1) $-2x+xy-xz$;

(2) $-7ab-14abx+49aby$;

(3) $m(x+2y)-2n(x+2y)$;

(4) $2(x-y)^2-x(y-x)$.



习题

A 组

1. 把下列各式分解因式:

(1) $10a-5c$;

(2) $ab-2abc$;

(3) $5xy-xyz$;

(4) $a^2+ab-ac$.

2. 把下列各式分解因式:

(1) $2x^2y-4xy^2z$;

(2) $7a^2b+14ab^2c$;

- (3) $15mn^2p^2 - 5mnp$;
- (4) $4ab - 6ab^2$.
3. 把下列各式分解因式:
- (1) $4a^2b^2 - ab^2$;
- (2) $-12a^2b^2c + 4a^2b^2 + 2ab^2c$;
- (3) $-4x^2y^2 + 8x^2y - 8xy$;
- (4) $x(x+y)(x-y) - x(x-y)^2$.
4. 用简便方法计算:
- (1) $2\ 001^2 - 2\ 001$;
- (2) $2\ 005 \times 2\ 006 - 2\ 005 \times 2\ 004 + 8 \times 2\ 005$.
5. 某商场共有三层, 第一层有商品 $(a+b)^2$ 种, 第二层有商品 $a(a+b)$ 种, 第三层有商品 $b(a+b)$ 种. 这个商场共有多少种商品? 请将结果进行因式分解.

B 组

1. 当 $x=37$ 时, 用简便方法求 $x^2 - 36x$ 的值.
2. 已知 $x^2 + 3x = -2$, 求 $5x^{1\ 000} + 15x^{999} + 10x^{998}$ 的值.
3. a 是整数, 请说明 $a^2 + a$ 一定能被 2 整除的理由.

11.3 公式法

整式相乘与因式分解是互为相反的过程. 如果把学过的乘法公式反过来使用, 那么就可以将某些多项式分解因式.

实际上, 把平方差公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

反过来, 就得到

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

这样就成为分解因式的一个公式了.



试着做做

试着将下面的多项式分解因式:

(1) $p^2-16=$ _____;

(2) $y^2-4=$ _____;

(3) $x^2-\frac{1}{9}=$ _____;

(4) $4a^2-b^2=$ _____.

如果一个多项式可化为两个整式的平方差的形式, 那么它就可以用平方差公式分解因式了.

例 1 把下列各式分解因式:

(1) $4x^2-9y^2$;

(2) $(3m-1)^2-9$.

解: (1) $4x^2-9y^2$

$$=(2x)^2-(3y)^2$$

$$=(2x+3y)(2x-3y).$$

(2) $(3m-1)^2-9$

$$=(3m-1)^2-3^2$$

$$=(3m-1+3)(3m-1-3)$$

$$=(3m+2)(3m-4).$$

例 2 把下列各式分解因式:

(1) a^3-16a ;

(2) $2ab^3-2ab$.

解: (1) $a^3 - 16a$
 $= a(a^2 - 16)$
 $= a(a+4)(a-4).$

(2) $2ab^3 - 2ab$
 $= 2ab(b^2 - 1)$
 $= 2ab(b+1)(b-1).$

当多项式有公因式时, 应先提出公因式, 再看能否利用平方差公式进行因式分解.

 **练习**

1. 下面分解因式的结果是否正确? 如果不正确, 指出错在哪里, 并改正过来.

(1) $4x^2 - y^2 = (4x+y)(4x-y);$

(2) $ab^2 - 9a^3 = (b+3a)(b-3a).$

2. 运用公式法分解因式:

(1) $25a^2 - 16b^2;$

(2) $a^2b^2 - \frac{1}{9}c^2;$

(3) $(a+2b)^2 - 4;$

(4) $x^4 - 25x^2.$

 **习题**

A 组

1. 把下列各式分解因式:

(1) $256 - x^2;$

(2) $9x^2 - 64;$

(3) $\frac{1}{16}x^2 - m^2n^2;$

(4) $9a^4 - a^2.$

2. 下列各式可以用平方差公式分解因式吗? 如果可以, 请分解; 如果不可以, 请说明理由.

(1) $x^2 + y^2;$

(2) $-x^2 + y^2;$

(3) $-x^2 - y^2;$

(4) $x^2 - 81.$

3. 把下列各式分解因式:

(1) $4x^2 - 100;$

(2) $12y^4 - 3y^2;$

(3) $x^3 - 64x;$

(4) $2a^4 - 50a^2.$

4. 把下列各式分解因式:

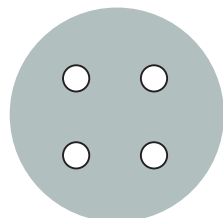
(1) $(x+1)^2 - a^2$;

(2) $(2x+3)^2 - 4m^2$;

(3) $(2x+3)^2 - (3x-4)^2$;

(4) $4(3x+y)^2 - (2x-y)^2$.

5. 如图, 在半径为 R 的圆形钢板上冲去半径为 r 的四个小圆孔. 若 $R=8.6$ cm, $r=0.7$ cm, 请你利用因式分解的方法计算出剩余钢板的面积. (π 取 3.14)



(第 5 题)

B 组

1. 分解因式: $x^4 - 1$.

2. 计算: $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{9^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$.

像平方差公式一样, 若把完全平方公式反过来, 就得到

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2.$$

这样, 我们也可以利用完全平方公式把一些多项式进行因式分解.

例 3 把下列各式分解因式:

(1) $t^2 + 22t + 121$; (2) $m^2 + \frac{1}{4}n^2 - mn$.

解: (1) $t^2 + 22t + 121$
 $= t^2 + 2 \times 11t + 11^2$
 $= (t+11)^2$.

(2) $m^2 + \frac{1}{4}n^2 - mn$
 $= m^2 - 2 \cdot m \cdot \frac{1}{2}n + \left(\frac{1}{2}n\right)^2$
 $= \left(m - \frac{1}{2}n\right)^2$.



大家谈谈

1. 下面的多项式能否用完全平方公式分解因式？请说明理由.

- (1) $x^2 + 10x + 25$; (2) $4m^2 - 4m + 1$;
 (3) $4a^2 + 18ab + 9b^2$; (4) $m^2 - 4mn + 4n^2$.

2. 具有什么特征的多项式能用完全平方公式分解因式？

例 4 把下列各式分解因式：

- (1) $ax^2 + 2a^2x + a^3$;
 (2) $(x+y)^2 - 4(x+y) + 4$;
 (3) $(3m-1)^2 + (3m-1) + \frac{1}{4}$.

解：(1) $ax^2 + 2a^2x + a^3$
 $= a(x^2 + 2ax + a^2)$
 $= a(x+a)^2.$

(2) $(x+y)^2 - 4(x+y) + 4$
 $= (x+y)^2 - 2 \cdot (x+y) \cdot 2 + 2^2$
 $= (x+y-2)^2.$

(3) $(3m-1)^2 + (3m-1) + \frac{1}{4}$
 $= (3m-1)^2 + 2 \cdot (3m-1) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
 $= \left(3m-1 + \frac{1}{2}\right)^2$
 $= \left(3m - \frac{1}{2}\right)^2.$

运用平方差公式和完全平方公式分解因式的方法叫做公式法.



练习

1. 把下列各式分解因式：

- (1) $2xy - x^2 - y^2$; (2) $36p^2 + 12pq + q^2$;
 (3) $16x^2 + 8x + 1$; (4) $a^2 - 4a(b+c) + 4(b+c)^2$.

2. 把下列各式分解因式:

(1) $-x^2+2x-1$;

(2) $x^2+xy+\frac{1}{4}y^2$;

(3) $4x^2+4x+1$;

(4) a^4-2a^2+1 .



A 组

1. 把下列各式分解因式:

(1) $x^2+8x+16$;

(2) $64x^2+y^2+16xy$;

(3) $y^2+y+\frac{1}{4}$;

(4) $\frac{1}{9}t^2+\frac{2}{3}ts+s^2$.

2. 把下列各式分解因式:

(1) $6xy-x^2-9y^2$;

(2) $-m^3+2m^2-m$;

(3) $3x^2-6x+3$;

(4) $4xy^2+4x^2y+y^3$.

3. 把下列各式分解因式:

(1) $x^2-6x(y-z)+9(y-z)^2$;

(2) $(a+b)^2-4(a+b)c+4c^2$.

4. 用简便方法计算: $2\ 001^2-4\ 002+1$.

B 组

1. 把下列各式分解因式:

(1) x^4-8x^2+16 ;

(2) $(a^2+b^2)^2-4a^2b^2$.

2. 请给 $4x^2+1$ 添上一个单项式, 使新得到的多项式能运用完全平方公式分解因式.