

# 第十一章

## 因式分解

在本章中，我们将学习

- 因式分解
- 用提公因式法分解因式
- 用公式法分解因式

整式乘法  $\longleftrightarrow$  因式分解

多

项式乘法是把几个整式的乘积化为一个多项式。反过来，你能将一个多项式分解成几个整式乘积的形式吗？

$$ma + mb = m(a + b)$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$



# 11.1 因式分解

在小学阶段，我们由数的乘法运算获得启发，建立了因数的概念。类似地，我们是否可以探索从整式的乘法获得类似“因数”的概念呢？



## 观察与思考

观察下面计算  $2011^2 - 2011 \times 2010$  和  $37^2 - 36^2$  的过程，哪种更简便？

小明的方法

$$\begin{aligned} & 2011^2 - 2011 \times 2010 \\ &= 4044121 - 4042110 \\ &= 2011. \\ & 37^2 - 36^2 \\ &= 1369 - 1296 \\ &= 73. \end{aligned}$$

小亮的方法

$$\begin{aligned} & 2011^2 - 2011 \times 2010 \\ &= 2011 \times (2011 - 2010) \\ &= 2011. \\ & 37^2 - 36^2 \\ &= (37 + 36)(37 - 36) \\ &= 73. \end{aligned}$$

小亮的方法是运用了乘法对加法的分配律以及平方差公式，运算较简单。

现在，我们来研究多项式的因式分解问题。

由整式的乘法运算，我们知道：

$$x(x-2)=x^2-2x, \quad (x+y)(x-y)=x^2-y^2, \quad (x+1)^2=x^2+2x+1.$$

反过来，可以把这些多项式写成整式乘积的形式：

$$x^2-2x=x(x-2), \quad x^2-y^2=(x+y)(x-y), \quad x^2+2x+1=(x+1)^2.$$

像这样，把一个多项式分解成几个整式乘积的形式，叫做多项式的**因式分解**(factorization)，也叫做将多项式**分解因式**(factoring)。其中每个整式都叫做这个多项式的因式。



## 大家谈谈

- 多项式相乘的结果是什么？
- 一个多项式进行因式分解的结果是什么？

因式分解的结果是几个整式乘积的形式。

多项式的因式分解与乘法运算是不同的. 多项式的因式分解是把一个多项式化成几个整式的乘积, 而多项式的乘法运算是把几个整式的乘积化成一个多项式.

多项式的因式分解与多项式的乘法运算是相反的变形过程.

$$\frac{(x+y)(x-y)}{\text{多项式 } x+y \text{ 与 } x-y \text{ 的乘积为 } x^2 - y^2} = \frac{x^2 - y^2}{\text{多项式 } x^2 - y^2 \text{ 分解为 } x+y \text{ 与 } x-y \text{ 的乘积}}$$



1. 下列各式中, 从等号左边到右边的变形, 哪些是多项式的因式分解?

- (1)  $x^2 - 4 = (x+2)(x-2)$ ; (2)  $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$ ;  
(3)  $7m + 14n = 7(m+2n)$ ; (4)  $x(y+1) = xy + x$ .

2. 下列对多项式的变形, 哪些是因式分解? 是因式分解的, 指出它的各因式.

- (1)  $x^2 - x = x(x-1)$ ; (2)  $10x + 5y = 5(2x+y)$ ;  
(3)  $a^2 - 1 = (a+1)(a-1)$ ; (4)  $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ .



1. 下列各式从等号左边到右边的变形, 哪些是因式分解?

- (1)  $(m+n)(m-n) = m^2 - n^2$ ; (2)  $m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$ ;  
(3)  $5a + 10b = 5(a+2b)$ ; (4)  $x^2 - 2x + 1 = x(x-2) + 1$ .

2. 请将下列等式左边多项式的另一个因式填在括号里:

- (1)  $2x + 4 = 2(\quad)$ ; (2)  $x - xy = x(\quad)$ ;  
(3)  $16x^2 - 1 = (4x+1)(\quad)$ ; (4)  $a^2 + 6a + 9 = (a+3)(\quad)$ .



1. 对下列各式所进行的因式分解正确吗? 如果不正确, 请改正过来.

- (1)  $ab - b = b(a-1)$ ; (2)  $-10x - 10 = -10(x-1)$ ;  
(3)  $3x + 3y = 3(x+y)$ ; (4)  $m^2 + 4m + 4 = m^2 + 4(m+1)$ .

2. 请将下列等式左边多项式的另一个因式填在括号里:

- (1)  $2R - 2r = 2(\quad)$ ; (2)  $3mn - 6nx = (\quad)(m-2x)$ ;  
(3)  $3ax + 3ay = 3a(\quad)$ ; (4)  $10ax - 15xy + 5x = 5x(\quad)$ .

## 11.2 提公因式法

提公因式法是进行多项式因式分解的最基本方法之一。用提公因式法分解因式的关键是确定多项式的公因式。



### 观察与思考

- 多项式  $ma+mb+mc$  有几项？每一项的因式都有哪些？这些项中有没有公共的因式？若有，是哪个？
- 多项式  $ab^2-2a^2b$  的两项中，有没有公共的因式？若有，是哪些？

实际上，有：

多项式	项	各项的公共因式
$ma+mb+mc$	$ma, mb, mc$	$m$
$ab^2-2a^2b$	$ab^2, -2a^2b$	$a, b, ab$

一般地，多项式的各项都含有的因式，叫做这个多项式各项的公因式(common factor)，简称多项式的公因式。

逆用乘法对加法的分配律，可以把公因式写在括号外边，作为积的一个因式，写成下面的形式：

$$\begin{aligned}ma+mb+mc &= m(a+b+c), \\ab^2-2a^2b &= ab(b-2a).\end{aligned}$$

这种将多项式分解因式的方法，叫做提公因式法。



### 做一做

- 写出下列多项式的公因式：

- $6x-9x^2$ ；
- $abc+2a$ ；
- $abc-ab^2+2ab$ ；
- $2x^2y+4xy^2-6xy$ 。

2. 先指出下列多项式的公因式，再进行因式分解：

(1)  $x^2 + 2x$ ;

(2)  $2x^2 + 4x$ ;

(3)  $2a^2x - 6ax^2$ ;

(4)  $4a^4 - 12a^3 + 16a^2$ .



在“做一做”中，三名同学对多项式  $2x^2 + 4x$  分解因式的结果如下：

(1)  $2x^2 + 4x = 2(x^2 - x)$ ;

(2)  $2x^2 + 4x = x(2x + 4)$ ;

(3)  $2x^2 + 4x = 2x(x + 2)$ .

请你谈谈用提公因式法分解因式应注意的问题。

一般地，当多项式的各项系数都是整数时，公因式的系数应取各项系数的最大公约数，字母应取各项相同的字母，且相同字母的指数取次数最低的。

例 1 把下列多项式分解因式：

(1)  $-3x^2 + 6xy - 3xz$ ; (2)  $3a^3b + 9a^2b^2 - 6a^2b$ .

解：(1)  $-3x^2 + 6xy - 3xz$   
 $= (-3x) \cdot x + (-3x) \cdot (-2y) +$   
 $\quad (-3x) \cdot z$   
 $= -3x(x - 2y + z).$

公因式的系数  
是负数时，提公因  
式后各项要变号。

(2)  $3a^3b + 9a^2b^2 - 6a^2b$   
 $= 3a^2b \cdot a + 3a^2b \cdot 3b - 3a^2b \cdot 2$   
 $= 3a^2b(a + 3b - 2).$



把  $5ab^3 - 10b^2c + 5b^2$  分解因式。

例 2 分解因式： $2a(b+c) - 5(b+c)$ .

解：  $2a(b+c) - 5(b+c)$   
 $= (b+c) \cdot 2a - (b+c) \cdot 5$   
 $= (b+c)(2a - 5).$

把  $b+c$  看成一  
个整体“提”出来。



1. 把下列各式分解因式：

- (1)  $5a+5b$ ;
- (2)  $m^2+m$ ;
- (3)  $x^2+2x$ ;
- (4)  $3xy+3xz$ .

2. 把下列多项式的公因式和分解因式的结果填入表格中：

多项式	公因式	分解因式的结果
$5a^2+10a^2bc$		
$12xyz-9x^2y^2$		
$2x^2+4xy-6x$		

3. 把下列各式分解因式：

- (1)  $-2x+xy-xz$ ;
- (2)  $-7ab-14abx+49aby$ ;
- (3)  $m(x+2y)-2n(x+2y)$ ;
- (4)  $2(x-y)^2-x(y-x)$ .



## A 组

1. 把下列各式分解因式：

- (1)  $10a-5c$ ;
- (2)  $ab-2abc$ ;
- (3)  $5xy-xyz$ ;
- (4)  $a^2+ab-ac$ .

2. 把下列各式分解因式：

- (1)  $2x^2y-4xy^2z$ ;
- (2)  $7a^2b+14ab^2c$ ;

$$(3) 15mn^2p^2 - 5mnp;$$

$$(4) 4ab - 6ab^2.$$

3. 把下列各式分解因式：

$$(1) 4a^2b^2 - ab^2;$$

$$(2) -12a^2b^2c + 4a^2b^2 + 2ab^2c;$$

$$(3) -4x^2y^2 + 8x^2y - 8xy;$$

$$(4) x(x+y)(x-y) - x(x-y)^2.$$

4. 用简便方法计算：

$$(1) 2001^2 - 2001;$$

$$(2) 2005 \times 2006 - 2005 \times 2004 + 8 \times 2005.$$

5. 某商场共有三层，第一层有商品  $(a+b)^2$  种，第二层有商品  $a(a+b)$  种，第三层有商品  $b(a+b)$  种。这个商场共有多少种商品？请将结果进行因式分解。

## B 组

1. 当  $x=37$  时，用简便方法求  $x^2 - 36x$  的值。

2. 已知  $x^2 + 3x = -2$ ，求  $5x^{1000} + 15x^{999} + 10x^{998}$  的值。

3.  $a$  是整数，请说明  $a^2 + a$  一定能被 2 整除的理由。

# 11.3 公式法

整式相乘与因式分解是互为相反的过程。如果把学过的乘法公式反过来使用，那么就可以将某些多项式分解因式。

实际上，把平方差公式

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

反过来，就得到

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

这样就成为分解因式的一个公式了。



试着将下面的多项式分解因式：

$$\begin{array}{ll} (1) \ p^2-16= \underline{\hspace{2cm}}; & (2) \ y^2-4= \underline{\hspace{2cm}}; \\ (3) \ x^2-\frac{1}{9}= \underline{\hspace{2cm}}; & (4) \ 4a^2-b^2= \underline{\hspace{2cm}}. \end{array}$$

如果一个多项式可化为两个整式的平方差的形式，那么它就可以用平方差公式分解因式了。

**例 1** 把下列各式分解因式：

$$(1) \ 4x^2-9y^2; \quad (2) \ (3m-1)^2-9.$$

解：(1)  $4x^2-9y^2$   
 $= (2x)^2-(3y)^2$   
 $= (2x+3y)(2x-3y).$

$$\begin{aligned} (2) \ (3m-1)^2-9 &= (3m-1)^2-3^2 \\ &= (3m-1+3)(3m-1-3) \\ &= (3m+2)(3m-4). \end{aligned}$$

**例 2** 把下列各式分解因式：

$$(1) \ a^3-16a; \quad (2) \ 2ab^3-2ab.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解: (1)} \quad & a^3 - 16a \\
 &= a(a^2 - 16) \\
 &= a(a+4)(a-4). \\
 \text{(2)} \quad & 2ab^3 - 2ab \\
 &= 2ab(b^2 - 1) \\
 &= 2ab(b+1)(b-1).
 \end{aligned}$$

当多项式有公因式时, 应先提出公因式, 再看能否利用平方差公式进行因式分解.



1. 下面分解因式的结果是否正确? 如果不正确, 指出错在哪里, 并改正过来.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 4x^2 - y^2 = (4x+y)(4x-y); \\
 (2) \quad & ab^2 - 9a^3 = (b+3a)(b-3a).
 \end{aligned}$$

2. 运用公式法分解因式:

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad 25a^2 - 16b^2; & (2) \quad a^2b^2 - \frac{1}{9}c^2; \\
 (3) \quad (a+2b)^2 - 4; & (4) \quad x^4 - 25x^2.
 \end{array}$$



## A 组

1. 把下列各式分解因式:

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad 256 - x^2; & (2) \quad 9x^2 - 64; \\
 (3) \quad \frac{1}{16}x^2 - m^2n^2; & (4) \quad 9a^4 - a^2.
 \end{array}$$

2. 下列各式可以用平方差公式分解因式吗? 如果可以, 请分解; 如果不可以, 请说明理由.

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad x^2 + y^2; & (2) \quad -x^2 + y^2; \\
 (3) \quad -x^2 - y^2; & (4) \quad x^2 - 81.
 \end{array}$$

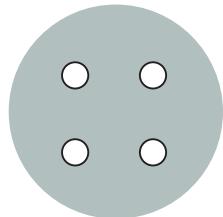
3. 把下列各式分解因式:

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad 4x^2 - 100; & (2) \quad 12y^4 - 3y^2; \\
 (3) \quad x^3 - 64x; & (4) \quad 2a^4 - 50a^2.
 \end{array}$$

4. 把下列各式分解因式：

- (1)  $(x+1)^2 - a^2$ ;
- (2)  $(2x+3)^2 - 4m^2$ ;
- (3)  $(2x+3)^2 - (3x-4)^2$ ;
- (4)  $4(3x+y)^2 - (2x-y)^2$ .

5. 如图，在半径为  $R$  的圆形钢板上冲去半径为  $r$  的四个小圆孔。若  $R=8.6$  cm,  $r=0.7$  cm, 请你利用因式分解的方法计算出剩余钢板的面积。 $(\pi$  取 3.14)



(第 5 题)

## B 组

1. 分解因式:  $x^4 - 1$ .

2. 计算:  $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right)$ .

像平方差公式一样，若把完全平方公式反过来，就得到

$$\begin{aligned}a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)^2, \\a^2 - 2ab + b^2 &= (a-b)^2.\end{aligned}$$

这样，我们也可以利用完全平方公式把一些多项式进行因式分解。

例 3 把下列各式分解因式：

$$(1) t^2 + 22t + 121; \quad (2) m^2 + \frac{1}{4}n^2 - mn.$$

解：(1)  $t^2 + 22t + 121$   
 $= t^2 + 2 \times 11t + 11^2$   
 $= (t+11)^2.$

$$\begin{aligned}(2) \quad m^2 + \frac{1}{4}n^2 - mn \\&= m^2 - 2 \cdot m \cdot \frac{1}{2}n + \left(\frac{1}{2}n\right)^2 \\&= \left(m - \frac{1}{2}n\right)^2.\end{aligned}$$



## 大家谈谈

1. 下面的多项式能否用完全平方公式分解因式？请说明理由.
  - (1)  $x^2 + 10x + 25$ ;
  - (2)  $4m^2 - 4m + 1$ ;
  - (3)  $4a^2 + 18ab + 9b^2$ ;
  - (4)  $m^2 - 4mn + 4n^2$ .
2. 具有什么特征的多项式能用完全平方公式分解因式？

例 4 把下列各式分解因式：

- (1)  $ax^2 + 2a^2x + a^3$ ;
- (2)  $(x+y)^2 - 4(x+y) + 4$ ;
- (3)  $(3m-1)^2 + (3m-1) + \frac{1}{4}$ .

解：(1) 
$$\begin{aligned} ax^2 + 2a^2x + a^3 \\ = a(x^2 + 2ax + a^2) \\ = a(x+a)^2. \end{aligned}$$

(2) 
$$\begin{aligned} (x+y)^2 - 4(x+y) + 4 \\ = (x+y)^2 - 2 \cdot (x+y) \cdot 2 + 2^2 \\ = (x+y-2)^2. \end{aligned}$$

(3) 
$$\begin{aligned} (3m-1)^2 + (3m-1) + \frac{1}{4} \\ = (3m-1)^2 + 2 \cdot (3m-1) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ = \left(3m-1 + \frac{1}{2}\right)^2 \\ = \left(3m - \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

运用平方差公式和完全平方公式分解因式的方法叫做公式法.



## 练习

1. 把下列各式分解因式:
  - (1)  $2xy - x^2 - y^2$ ;
  - (2)  $36p^2 + 12pq + q^2$ ;
  - (3)  $16x^2 + 8x + 1$ ;
  - (4)  $a^2 - 4a(b+c) + 4(b+c)^2$ .

2. 把下列各式分解因式：

(1)  $-x^2 + 2x - 1$ ;

(2)  $x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2$ ;

(3)  $4x^2 + 4x + 1$ ;

(4)  $a^4 - 2a^2 + 1$ .



## A 组

1. 把下列各式分解因式：

(1)  $x^2 + 8x + 16$ ;

(2)  $64x^2 + y^2 + 16xy$ ;

(3)  $y^2 + y + \frac{1}{4}$ ;

(4)  $\frac{1}{9}t^2 + \frac{2}{3}ts + s^2$ .

2. 把下列各式分解因式：

(1)  $6xy - x^2 - 9y^2$ ;

(2)  $-m^3 + 2m^2 - m$ ;

(3)  $3x^2 - 6x + 3$ ;

(4)  $4xy^2 + 4x^2y + y^3$ .

3. 把下列各式分解因式：

(1)  $x^2 - 6x(y - z) + 9(y - z)^2$ ;

(2)  $(a+b)^2 - 4(a+b)c + 4c^2$ .

4. 用简便方法计算： $2001^2 - 4002 + 1$ .

## B 组

1. 把下列各式分解因式：

(1)  $x^4 - 8x^2 + 16$ ;

(2)  $(a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2$ .

2. 请给  $4x^2 + 1$  添上一个单项式，使新得到的多项式能运用完全平方公式分解因式。